Probabilités

I Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** est une expérience dans laquelle on connaît les différents résultats possibles sans pouvoir dire précisément lequel va se produire.

Définition : Dans une expérience aléatoire, les résultats possibles s'appellent **les issues**.

Définition : L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est **l'Univers**. Il est noté Ω.

Exemple : On lance un dé cubique et on observe le numéro inscrit sur la face du dessus.
Cette expérience aléatoire comporte 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
L'univers de cette expérience est donc $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.

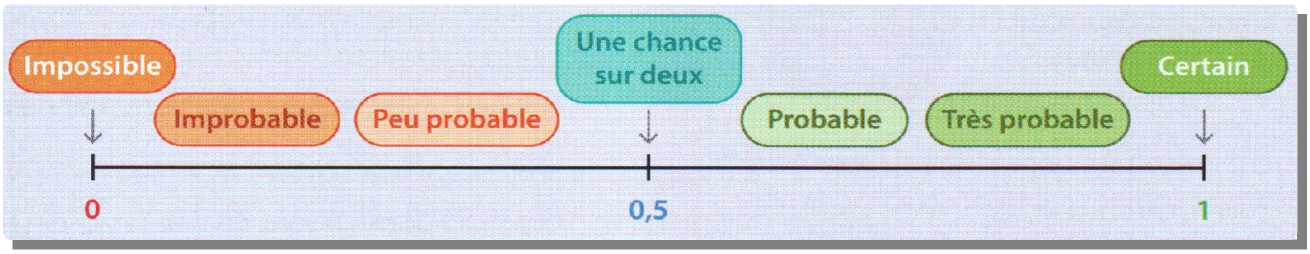
Définition : **Un évènement** est une condition qui peut être (ou ne pas être) réalisée à l'issue d'une expérience aléatoire.

Exemple : On lance un dé cubique et on s'intéresse à l'évènement A : « *Obtenir un multiple de 3* ».

Si on obtient les issues 3 ou 6, **l'évènement A est réalisé**.
Si on obtient les issues 1, 2 ou 5, **l'évènement A n'est pas réalisé**.

II Calculer une probabilité

Définition : **La probabilité** d'une issue est la « proportion de chances » d'obtenir cette issue.
Elle est représentée par un nombre compris entre 0 et 1.



Exemple : Lorsqu'on lance une pièce équilibrée, on a une chance sur 2 d'obtenir «Face».
On dit que la probabilité d'obtenir «Face» est de $\frac{1}{2}$ ou de 0,5 ou encore de 50 %.

Propriété : La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Propriété : La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemple : On lance un dé **truqué** pour lequel les 6 issues ont des probabilités différentes :

Issues	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Probabilités	0,3	0,1	0,4	0,1	0,05	0,05

On vérifie que 0,3 + 0,1 + 0,4 + 0,1 + 0,05 + 0,05 = 1.

De plus, les issues qui réalisent l'évènement «*obtenir un nombre impair*» sont 1, 3 et 5.
On calcule 0,3 + 0,4 + 0,05 = 0,75.

Conclusion : On a 75% de chances d'obtenir un nombre impair avec ce dé.

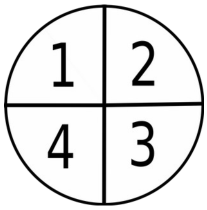
III Équiprobabilité

Définition : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les issues sont **équiprobables**.

Exemple : On lance au hasard une fléchette sur la cible à droite.

Les 4 issues sont équiprobables.

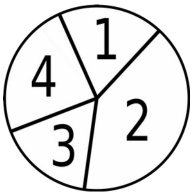
Chaque issues a une probabilité égale à $\frac{1}{4}$ ou 25%.



Exemple : Si maintenant on utilise la cible à droite :

Les 4 issues NE SONT PAS équiprobables

La zone 2 a plus de chance d'être obtenue que la zone 1.



Propriété : Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont **équiprobables**, la probabilité d'un évènement A est :

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple : On lance un dé **équilibré** à 6 faces.

L'évènement A : *«Obtenir un nombre supérieur à 4»* est réalisé pas les issues 5 et 6.

Comme les issues sont **équiprobables**, on peut affirmer que $P(A) = \frac{2}{6}$.

IV Évènements particuliers

Définition :
Un **évènement impossible** est un évènement qui ne se réalise jamais. Sa probabilité est égale à 0.
Un **évènement certain** est un évènement qui se réalise toujours. Sa probabilité est égale à 1.

Exemples : Lorsqu'on lance un dé, l'évènement A : «Obtenir un 7» est **impossible**. On a donc $P(A) = 0.$
L'évènement B :«Obtenir un nombre plus grand que 0» est **certain**. On a donc $P(B) = 1.$

Définition : L'évènement **contraire** d'un évènement A est l'évènement qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. On le note $\overline{A}$.

Exemples : On lance une pièce. Le contraire de A : « *obtenir pile* » est l'évènement $\overline{A}$: « *obtenir face* ».

Propriété 3 : Les probabilités d'un événement A et de son contraire $\overline{A}$ sont liées par la formule $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

Exemple : On écrit les lettres du mot M – A – T – H – E – M – A – T – I – Q – U – E – S sur 13 étiquettes.
On choisit une étiquette au hasard et on s'intéresse à l'évènement K : « *obtenir une voyelle* ».

On sait que $\mathbf{P(K) =}$

et que le contraire de K est l'évènement $\overline{K}$: ....

Or, la probabilité de l'évènement contraire est donnée par la formule $\boldsymbol{P(\overline{K}) =}$

Finalement $\boldsymbol{P(\overline{K}) =}$

V Évènements incompatibles

Définition : Deux évènements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple : On lance un dé à 6 faces. On s'intéresse aux évènements :

A : *«Obtenir un nombre inférieur à 2»*
B : *«Obtenir un nombre supérieur à 4»*
C : *«Obtenir un nombre impair»*

A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps : ils sont incompatibles.
B et C sont tous les deux réalisés si le résultat est 5 : ils ne sont donc pas incompatibles

Propriété: Si deux évènements sont **incompatibles**, la probabilité pour que l'un OU l'autre se réalise est égale à la somme de leurs deux probabilités : **P(A OU B) = P(A) + P(B).**

Exemple : On reprend l'exemple précédent. On veut calculer la probabilité de l'évènement :

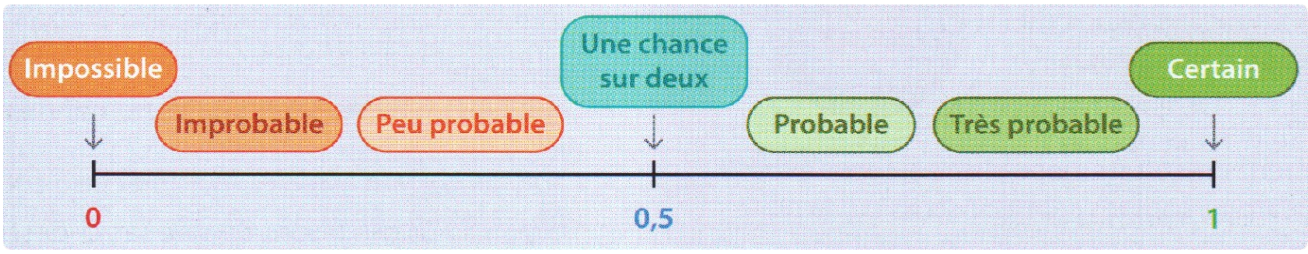
C :« *Obtenir un nombre inférieur à 2* ***OU*** *supérieur à 4* »

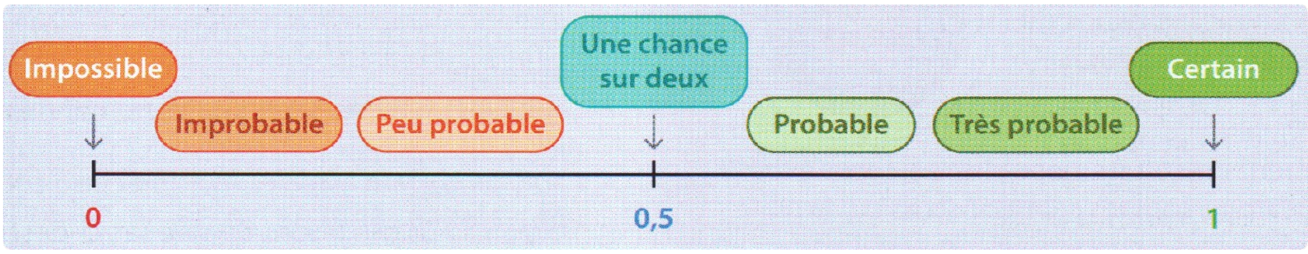
On voit que C = A ou B. De plus, on sait que les événements A et B sont **incompatibles.**

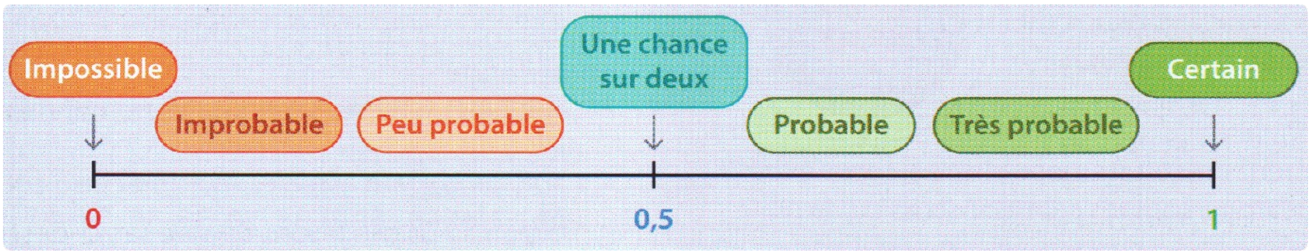
Comme $P(A)=\frac{1}{6}$ et comme $P(B)=\frac{2}{6}$, alors

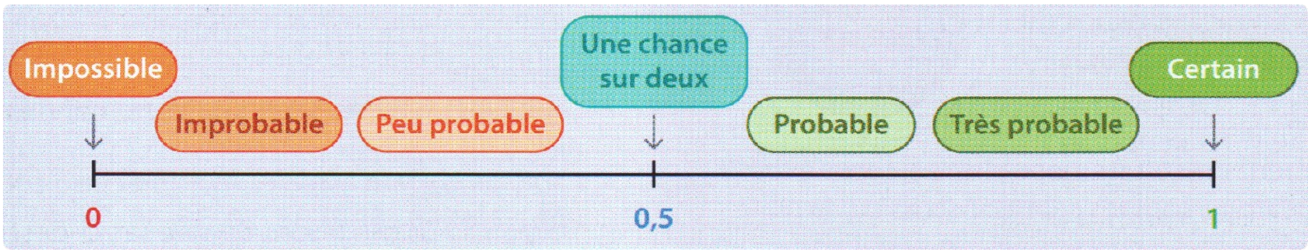
$$P(C) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} .$$

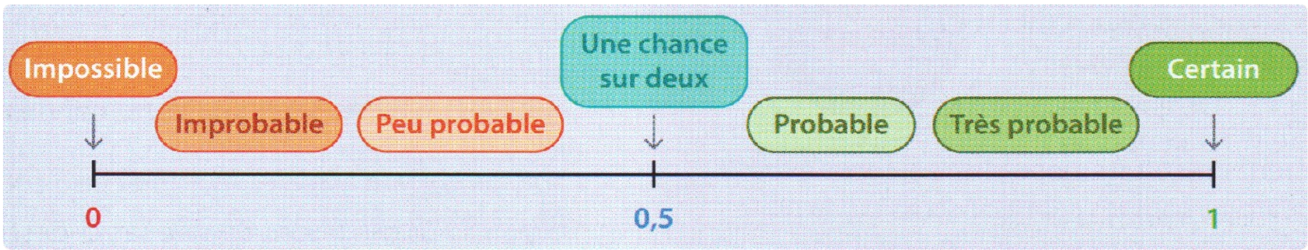
Conclusion : On a donc 50 % de chances d'avoir un nombre inférieur à 2 **ou** supérieur à 4


Impossible
Improbable
Peu probable
Une chance sur deux
Probable
Très probable
Certain
0
0,5
1


Impossible
Improbable
Peu probable
Une chance sur deux
Probable
Très probable
Certain
0
0,5
1


Impossible
Improbable
Peu probable
Une chance sur deux
Probable
Très probable
Certain
0
0,5
1


Impossible
Improbable
Peu probable
Une chance sur deux
Probable
Très probable
Certain
0
0,5
1


Impossible
Improbable
Peu probable
Une chance sur deux
Probable
Très probable
Certain
0
0,5
1

Exemple : On écrit les lettres du mot M – A – T – H – E – M – A – T – I – Q – U – E – S sur 13 étiquettes.
On choisit une étiquette au hasard et on s'intéresse à l'évènement K : « *obtenir une voyelle* ».

On sait que $\mathbf{P(\,K\,) =}$

et que le contraire de K est l'évènement $\overline{K}$: ……………………………………………………………………………

Or, la probabilité de l'évènement contraire est donnée par la formule $P(\,\overline{K}\,) =$

Finalement $P(\,\overline{K}\,) =$

Exemple : On écrit les lettres du mot M – A – T – H – E – M – A – T – I – Q – U – E – S sur 13 étiquettes.
On choisit une étiquette au hasard et on s'intéresse à l'évènement K : « *obtenir une voyelle* ».

On sait que $\mathbf{P(\,K\,) =}$

et que le contraire de K est l'évènement $\overline{K}$: ……………………………………………………………………………

Or, la probabilité de l'évènement contraire est donnée par la formule $P(\,\overline{K}\,) =$

Finalement $P(\,\overline{K}\,) =$

Exemple : On écrit les lettres du mot M – A – T – H – E – M – A – T – I – Q – U – E – S sur 13 étiquettes.
On choisit une étiquette au hasard et on s'intéresse à l'évènement K : « *obtenir une voyelle* ».

On sait que $\mathbf{P(\,K\,) =}$

et que le contraire de K est l'évènement $\overline{K}$: ……………………………………………………………………………

Or, la probabilité de l'évènement contraire est donnée par la formule $P(\,\overline{K}\,) =$

Finalement $P(\,\overline{K}\,) =$

Exemple : On reprend l'exemple précédent. On veut calculer la probabilité de l'évènement :

C :« *Obtenir un nombre inférieur à 2* ***OU*** *supérieur à 4* »

On voit que C = A ou B. De plus, on sait que les événements A et B sont **incompatibles.**

Comme $P(A)=\dfrac{1}{6}$ et comme $P(B)=\dfrac{2}{6}$, alors

$$P(C) \ = \ P(A \ ou \ B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

Conclusion : On a donc 50 % de chances d'avoir un nombre inférieur à 2 **ou** supérieur à 4

Exemple : On reprend l'exemple précédent. On veut calculer la probabilité de l'évènement :

C :« *Obtenir un nombre inférieur à 2* ***OU*** *supérieur à 4* »

On voit que C = A ou B. De plus, on sait que les événements A et B sont **incompatibles.**

Comme $P(A)=\dfrac{1}{6}$ et comme $P(B)=\dfrac{2}{6}$, alors

$$P(C) \ = \ P(A \ ou \ B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

Conclusion : On a donc 50 % de chances d'avoir un nombre inférieur à 2 **ou** supérieur à 4