

# Arithmétique

## I Multiples et diviseurs

**Définition :** Lorsque la division euclidienne de  $a$  par  $b$  donne un **reste égal à zéro** on dit que :  
 $a$  est un **multiple** de  $b$  ou que  $b$  est un **diviseur** de  $a$  ou que  $a$  est **divisible** par  $b$

**Exemple :** La division euclidienne de 187 par 17 donne  $187 = 17 \times 11 + 0$  (le reste est nul).  
On peut donc dire que 187 est un multiple de 17, ou encore que 17 est un diviseur de 187.

**Exemple :** Les diviseurs de 20 sont 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 et 20.

**Propriété :** Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui même.

### Les critères de divisibilité :

- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0,2,4,6 ou 8, alors il est **divisible par 2**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3**.
- \* Si un nombre se termine par deux chiffres formant un multiple de 4 alors ce nombre est **divisible par 4**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est **divisible par 5**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est **divisible par 10**.

## II Diviseurs communs

**Remarque :** Deux nombres entiers peuvent avoir des **diviseurs en commun**.

**Exemple :** Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.  
Les diviseurs de 30 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 et 30.  
Les diviseurs communs de 12 et de 30 sont donc : 1 ; 2 ; 3 et 6.

**Définition :** le **PGCD** de deux nombres est le plus grand diviseur qu'ils ont en commun.

**Exemple :** Le PGCD de 12 et de 30 est le nombre 6 . On écrit cela  $\text{PGCD}(12 ; 30) = 6$ .

### III Nombres premiers entre eux

**Définition :** Deux nombres sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est le nombre 1.

**Exemple :** Les nombres 8 et 15 sont premiers entre eux // Les nombres 21 et 15 ne le sont pas.

**Définition :** Une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux

**Exemple :** Trouvons une fraction **irréductible** égale à  $\frac{84}{30}$  :

$$\frac{84}{30} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

### IV Nombres premiers

**Définition :** Un **nombre premier** est un entier positif qui a **exactement deux diviseurs** : 1 et lui même.

**Exemples :** Les nombres 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et 17 sont des nombres premiers.

**Attention :** Le nombre 1 n'est pas premier.  
Il ne suffit pas d'être un nombre impair pour être un nombre premier.

**Question :** Le nombre 51 est-t-il un nombre premier ? .....

**Théorème :** Il existe une infinité de nombres premiers.

### V Décomposition en facteurs premiers

$$20 = 2 \times 2 \times 5 \quad | \quad 66 = 2 \times 3 \times 11 \quad | \quad 24 = \dots\dots\dots \quad | \quad 35 = \dots\dots\dots$$

**Propriété :** Tout nombre entier strictement positif peut être écrit comme un **produit de nombres premiers** d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

**Méthode 1 (pas à pas) :** Décomposition de 84 en facteurs premiers.

84 est divisible par 2 :  $84 = 2 \times 42$ .

42 est divisible par 2 :  $84 = 2 \times 2 \times 21$

21 est divisible par 3 :  $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Il n'y a que des nombres premiers donc la décomposition est terminée :  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

**Méthode 2 (décomposition intermédiaire) :** Décomposition de 1600 en facteurs premiers.

$$1600 = 16 \times 100 \quad \text{donc} \quad 1600 = (4 \times 4) \times (4 \times 25) \quad \text{donc} \quad 1600 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 5 \times 5)$$

La décomposition est terminée :  $1600 = 2^6 \times 5^2$

### Les critères de divisibilité :

- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0,2,4,6 ou 8, alors il est **divisible par 2**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3**.
- \* Si un nombre se termine par deux chiffres formant un multiple de 4 alors ce nombre est **divisible par 4**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est **divisible par 5**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est **divisible par 10**.

### Les critères de divisibilité :

- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0,2,4,6 ou 8, alors il est **divisible par 2**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3**.
- \* Si un nombre se termine par deux chiffres formant un multiple de 4 alors ce nombre est **divisible par 4**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est **divisible par 5**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est **divisible par 10**.

### Les critères de divisibilité :

- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0,2,4,6 ou 8, alors il est **divisible par 2**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3**.
- \* Si un nombre se termine par deux chiffres formant un multiple de 4 alors ce nombre est **divisible par 4**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est **divisible par 5**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est **divisible par 10**.

### Les critères de divisibilité :

- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0,2,4,6 ou 8, alors il est **divisible par 2**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3**.
- \* Si un nombre se termine par deux chiffres formant un multiple de 4 alors ce nombre est **divisible par 4**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est **divisible par 5**.
- \* Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9**.
- \* Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est **divisible par 10**.