Chapitre 1 : Nombres et calculs

I Ensembles de nombres

Notations (les symboles $\in$ et $\subset$)

Prenons deux ensembles C et F avec, par exemple, C les élèves de la classe et F les filles de la classe.
- F est un sous-ensemble de C. On dit que **F est inclus dans C** et on note cela $F \subset C$.
- Si Paul est un élève de la classe, on dit que « **Paul appartient à C** » et on note cela $Paul \in C$.

Définition :

- L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...

- L'ensemble des **nombres relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
C'est l'ensemble des entiers positifs ou négatifs : ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$. C'est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux éléments de $\mathbb{Z}$ avec b différent de zéro ($b \neq 0$).

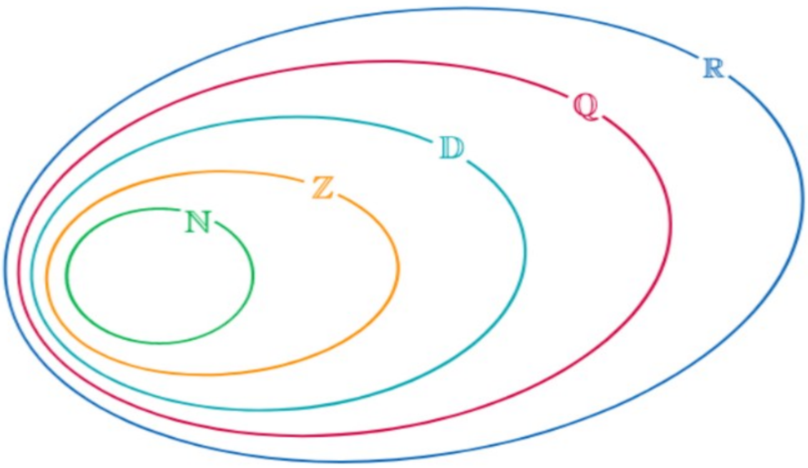
- L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$. Ce sont les nombres rationnels que l'on peut écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par exemple $\frac{25}{100}$; $\frac{345}{10}$; $1{,}304$; $\frac{-1304}{1000}$

- Enfin, l'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels auquel il faut ajouter tout les nombres irrationnels comme π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, le nombre d'or ...

Propriété :

Ces ensembles sont «de plus en plus gros» :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



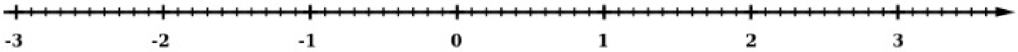
Propriété : Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal ($\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$).

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Alors $\frac{1}{3}$ peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Donc $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ et avec le produit en croix $10^n = 3a$. Ainsi, comme $3a$ est un multiple de 3, 10^n est aussi un multiple de 3. Or, aucun des nombres 1, 10, 100, 1000, 10 000 ... n'est un multiple de 3 donc c'est absurde et $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

II Intervalles et valeur absolue

Rappel : Un nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique



(placer les points d'abscisses : $-2{,}5$; $-0{,}25$; $\frac{2}{3}$; $1{,}6$; π)

Définition (valeur absolue):

- Soit x un nombre réel, la **distance entre x et zéro** sur la droite graduée est un nombre **positif**, noté $|x|$. On appel ce nombre la **valeur absolue** de x.
- Soient a et b deux nombres réels. On appelle distance entre a et b le nombre $|b-a|$. C 'est la distance entre les deux nombres sur la droite graduée.

Exemples :

$|5|=5$ $\quad |-2|=2$ $\quad |5-3|=2$ $\quad |5-(-2)|=7$

$|-5|=$ $\quad |10|=$ $\quad |12{,}1-10|=$ $\quad |-0{,}5-2|=$

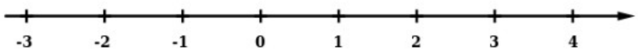
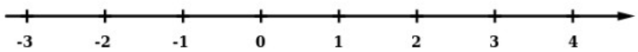
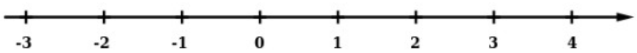
Propriété : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$

Remarque : La valeur absolue est une fonction $x \longrightarrow |x|$. Par exemple $-3 \longrightarrow |-3| = 3$

Définitions (intervalle) : Soients a et b deux nombres réels

On appelle **intervalle fermé** [a ; b] l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
On appelle **intervalle ouvert**]a ; b[l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.
De la même manière, [a ; b[est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.

Représentation graphique:

Intervalle [-2 ; 3]	
Intervalle]-1 ; 2[	
Intervalle [0,5 ; 3,5[	

On note [a ; $+\infty$ [l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.
De même,] $-\infty$; a] est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq a$.

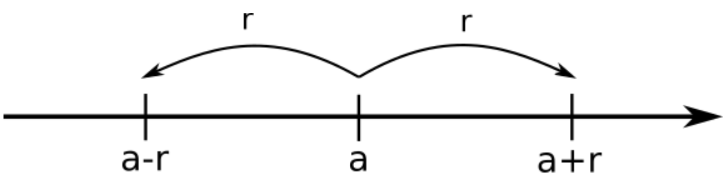
Définitions :
Soient I et J deux intervalles
- **L'intersection de I et J** est notée $I \cap J$.
C'est l'ensemble des réels qui appartiennent
à la fois à I et à J.
- **La réunion de I et J** est notée $I \cup J$.
C'est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou a J.

Exemples :
La réunion des intervalles [2 ; 5] et [4 ; 7] est l'intervalle [2 ; 7]. Cela s'écrit aussi $[2\ ;\ 5] \cup [4\ ;\ 7] = [2\ ;\ 7]$
L'intersection des intervalles [2 ; 5] et [4 ; 7] est [4 ; 5]. On écrira $[2\ ;\ 5] \cap [4\ ;\ 7] = [4\ ;\ 5]$

$[\ 1\ ;\ 4.8\ ] \cup [\ 4\ ;\ 7\ ] =$

$[\ 1\ ;\ 4.8\ ] \cup [\ 4\ ;\ 7\ ] =$

Propriété (intervalle et valeur absolue) :
Soient a un nombres réels, et r un réel positif.
Les nombres x qui sont à une distance de a inférieure à r sont exactement ceux de l'intervalle $[a-r\ ; a+r]$



En terme mathématique, on écrira plutôt $|x-a| \leq r$ si et seulement si $x \in [a-r\ ;\ a+r]$.

Exemple :

$|x-3| \leq 2 \ \Leftrightarrow\ x \in [3-2\ ;\ 3+2] \ \Leftrightarrow\ x \in [1\ ;\ 5]$

$x \in [-2\ ;\ 4] \ \Leftrightarrow\ x \in [1-3\ ;\ 1+3] \ \Leftrightarrow\ |x-1| \leq 3$

$|x-10| \leq 2 \ \Leftrightarrow$

$|x-(-5)| \leq 5 \ \Leftrightarrow$

III Arithmétique.

Définition : Soient a et b deux nombres entiers relatifs. On dit que a est un **diviseur** de b lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$. On dit aussi que b est un **multiple** de a ou encore que b est **divisible** par a.

Exemples : 3 est un diviseur de 36 car $36 = 3 \times 12$.
5 ne divise pas 21 car il est impossible d'avoir $21 = 5 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$,
le mieux qu'on puisse avoir est $21 = 5 \times 4 + 1$ (il reste 1).

Exemple : Les diviseurs du nombre 30 sont :

Définition : Soit $a \in \mathbb{Z}$ un nombre entier. a est un nombre :
- **pair** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k$
- **impair** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k + 1$

Exemple : $31 = 2 \times 15 + 1$ est un nombre impair et $36 = 2 \times 18$ est un nombre pair.

Théorème :
Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si b et b' sont deux multiples de a alors $b + b'$ est un multiple de a .

Démonstration :

Remarque : Une nombre entier k admet toujours au moins deux diviseurs : 1 et lui même. En effet, on a toujours $k = 1 \times k$. Pour certains nombres ce sont les seuls diviseurs possibles…

Définition :
Un nombre premier est un entier naturel possédant exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui même.

Exemples : Les nombres 2 ; 5 ; 7 ; 11 et 13 sont des nombres premiers.
Le nombre 12 n'est pas premier car ses diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Définition : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Ces deux nombres peuvent avoir des diviseurs en commun.
Le plus grand diviseur commun de a et b est noté PGCD(a,b) (PGCD signifie «Plus Grand Commun Diviseur»).

Exemple : Cherchons le PGCD de 18 et 24.

Les diviseur de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9, et 18.

Les diviseurs de 24 sont :

Les diviseurs communs sont :

On peut donc écrire PGCD(18,24) =

Définition : Quand deux nombres n'ont pas de diviseur communs autre que le nombre 1, on dit qu'il sont premiers entre eux.

Exemple :
- 4 et 9 sont premiers entre eux
- 12 et 11 sont premiers entre eux
- 15 et 6 ne sont pas premier entre eux (ils sont tous les deux divisibles par 3).
- 30 et 5 ne sont pas premier entre eux (ils sont tous les deux divisibles par 5).

Remarque : deux nombres a et b sont premiers entre eux si et seulement si PGCD(a,b) = 1

Définition : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est sous forme irréductible si a et b sont premiers entre eux.

Exemple : Mettre sous forme irréductible la fraction $\frac{12}{18}$

Exemple : Mettre sous forme irréductible la fraction $\frac{21}{35}$

Exemple : Mettre sous forme irréductible la fraction $\frac{72}{120}$

Nous allons voir que la parité d'un nombre (le fait qu'il soit pair ou impair) ne change pas quand on le met au carré.

Propriété A :

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si a est impair alors a^2 est impair.

Démonstration :

Propriété B :

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si a est pair alors a^2 est pair. (Démonstration : c'est quasiment la même)

Contraposée de la propriété B :

Finalement, en réunissant A et la contraposée de B, on a deux théorèmes :

Un nombre est impair si et seulement si **sont carré est impair.**

ET

Un nombre est pair si et seulement si **sont carré est pair.**

Le « si et seulement si » signifie que ça marche dans les deux sens :

a est impair $\Longleftrightarrow$ a^2 est impair

Nous avons désormais tous les outils pour démontrer le théorème suivant :

Théorème : Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel. En d'autres termes $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration :

IV Racine carrée d'un nombre.

Définition : Soit x un nombre réels positif. La racine carré de x est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à x. Elle est notée $\sqrt{x}$.

On a donc, pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$.

Exemples : $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{25}=5$

Propriétés : Soient a et b deux nombre réels positifs. On a alors :

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Donc, si $b \neq 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2) Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

3) Si a et b sont strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration du point 1) :

Considérons a et b deux nombres réel positifs. On sait que $ab \geq 0$ et que $(\sqrt{ab})^2 = ab$

De plus $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$.

Ainsi, $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré : ils sont donc égaux.

Démonstration du point 2) :

On rappel d'abord qui si on a deux nombre positif x et y avec $x \geq y$ alors forcément $x^2 \geq y^2$.

Considérons deux nombres positifs a et b tels que a < b et essayons de montrer que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ (c'est le contraire de ce qu'on veut montrer).
D'après le rappel, on en déduit que $(\sqrt{a})^2 \geq (\sqrt{b})^2$ et donc que $a \geq b$. C'est le contraire de a < b donc c'est absurde. Finalement on a forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Exemples :

$\sqrt{36}=6$ car $6^2 = 36$, mais on peut aussi écrire que $\sqrt{36} = \sqrt{9\times4} = \sqrt{9}\times\sqrt{4} = 3\times2 = 6$

$\sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\times\sqrt{2}$

$81<100$ donc $\sqrt{81}<\sqrt{100}$ (ici c'est clair car $\sqrt{81}=9$ et $\sqrt{100}=10$)

Propriété :

Pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.