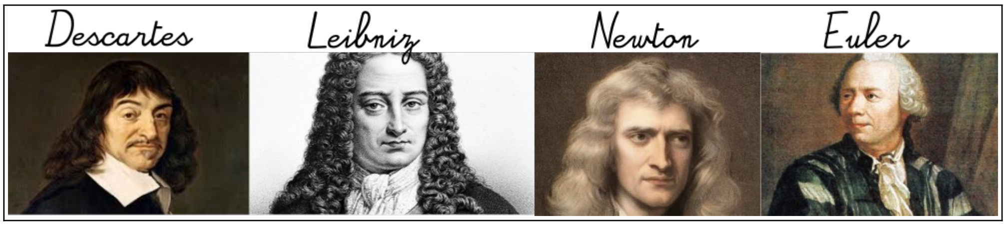
Chapitre 3 : Les fonctions et leurs variations

I Introduction

Une fonction est une notion mathématiques permettant de représenter :
Une transformation // une relation de dépendance entre deux quantités.

De nombreux mathématiciens sont à l'origine de cette notion mais l'histoire a principalement retenu :



Newton est un mathématicien et physicien anglais.
On lui doit notamment : la physique moderne / le télescope / la découverte de la loi de la gravitation universelle…

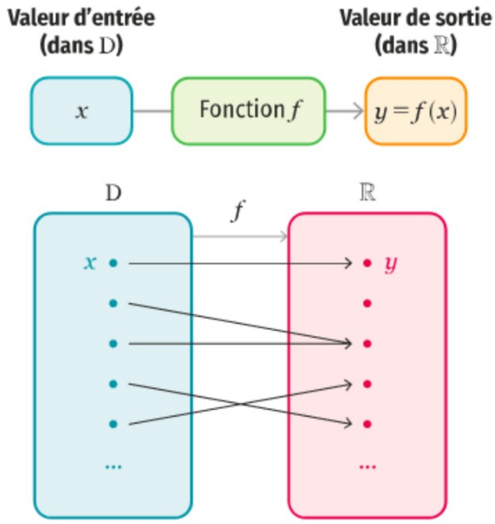
Dans ce cours, nous allons surtout parler de nombre et une fonction sera un objet mathématiques qui, à partir d'un nombre de départ, nous donne un nouveau nombre .

Définition : Définir une fonction f sur un ensemble D consiste à associer à chaque élément $x \in D$ un unique nombre réel y.

Pour signifier que y est le nombre associé à x par la fonction f on utilise la notation $y = f(x)$.

La fonction peut aussi être décrite par la notation suivante (plus précise) :

$$\begin{aligned} f \,:\, D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$



Définition : D est appelé le **domaine de définition** de f
Si x et y sont deux nombres tels que $y = f(x)$ alors :
- On dira que **y est l'image de x** par la fonction f
- On dira que **x est un antécédent de y** par la fonction f.

Exemple : Commençons par choisir une fonction simple f(x) =

L'image du nombre ……………….. par f est ………………………………………………………………………………………………

L'image du nombre ……………….. par f est ………………………………………………………………………………………………

Un antécédent du nombre …………………. par f est ……………………………………………………………………………

II Les différents modes de définition d'une fonction

Je pense à une fonction f et je veux la décrire complètement. Pour chaque nombre x du domaine définition D, je dois dire quel nombre y est associé à x par ma fonction.
Mais si D = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$ je dois le faire pour une infinité de nombres x? Comment faire ?

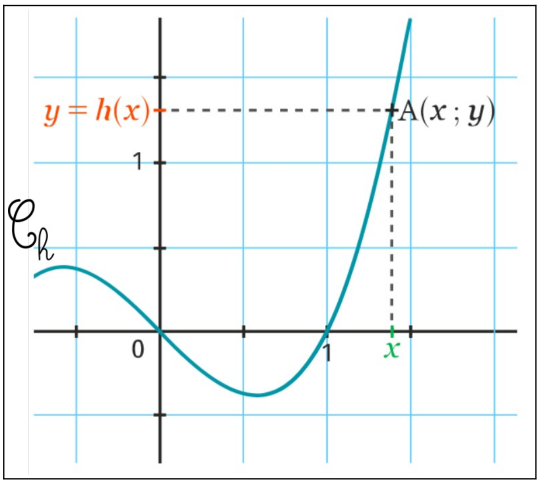
Il existe deux modes de définition d'une fonction f permettant d'associer à chaque nombre x de l'ensemble de définition D un nouveau nombre y (l'image de x par f):

1) Avec une expression algébrique : On donne l'expression de f(x) **en fonction de x**.
Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x+1$

2) Avec une courbe : la courbe représentative d'une fonction h est l'ensemble des points A(x ; y) tels que y=h(x). Elle est notée $\mathcal{C}_h$.

Pour qu'un point soit sur cette courbe, il faut donc que son ordonnée soit l'image de son l'abscisse par la fonction f.

Remarque : la définition basée sur la courbe est limité par la précision permise par la lecture graphique des coordonnées.



Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $g(x) = x^2-4$.

g(3) = ……………………………… g(2) = …………………………………… g(10) = ………………………………

Considérons un repère orthonormé et sa courbe représentative C_g dans ce repère.

Le point A(3 ; 5) sera sur la courbe car ……………………………………………………………………………………………

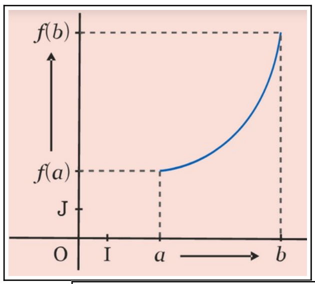
Le point B(2 ; 1) ne sera pas sur la courbe car …………………………………………………………………………………

Le point C(2 ; 0) sera sur la courbe car ……………………………………………………………………………………………

Exemple : Soit h la fonction donnée par l'expression algébrique $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
On ne peut pas appliquer cette fonction à $x = 1$. (pourquoi?)
Donc le domaine définition de cette fonction est $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

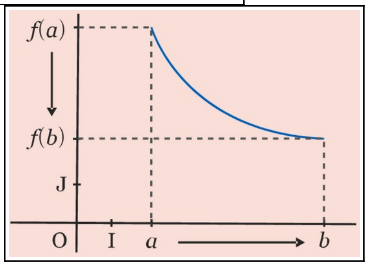
III Les variations et leur représentation dans un tableau.

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle D.



Définition (monotonie) :

f est dite **croissante** sur D, lorsque pour tout réel a et b de D tels que $a<b$, on a $f(a) \leq f(b)$.



f est dite **décroissante** sur D, lorsque pour tout réel a et b de D tels que $a<b$, on a $f(a) \geq f(b)$.

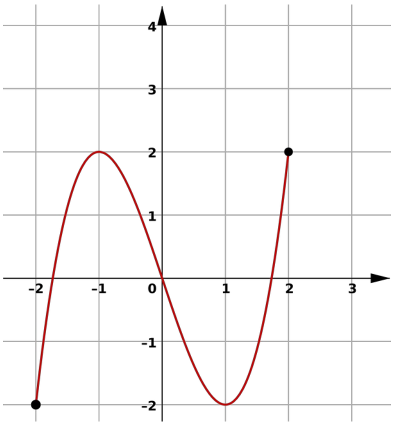
f est dite **monotone** sur D lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur D.

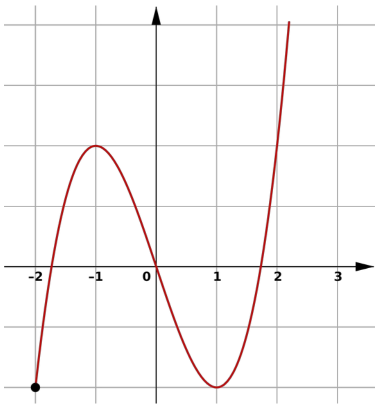
Lecture du domaine de définition :

Le domaine de définition d'une fonction est délimité par les points aux extrémités de sa courbe. Si il n'y a pas de point à l'une des extrémités de la courbe, on convient que la courbe **continue à l'infinie.**

Sur le premier exemple à droite, le domaine de définition est l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$

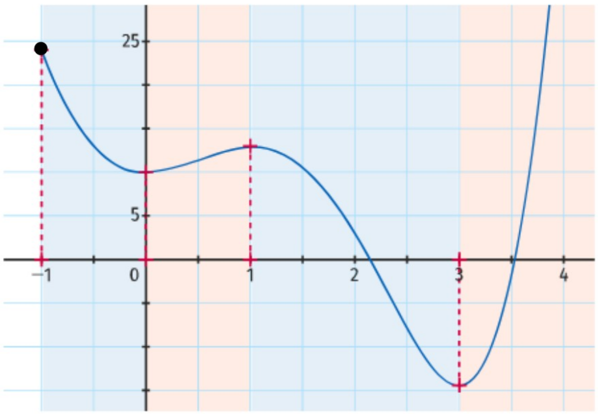
Sur le deuxième exemple à droite, le domaine de définition est l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$





Définition (tableau de variations):

Pour représenter les variations d'une fonction f sur son domaine de définition, on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possible. Si on connaît les images, on les écrit au bout des flèches. L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f.



Une fonction f, définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ est représentée à droite . Elle est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$, croissante sur $[0\ ;\ 1]$, décroissante sur $[1\ ;\ 3]$ et croissante sur $[3\ ;\ +\infty[$.

Le tableau de variations de f est :

x	-1		0		1		3		$+\infty$
variations de f	24	↘	10	↗	13	↘	-14	↗	

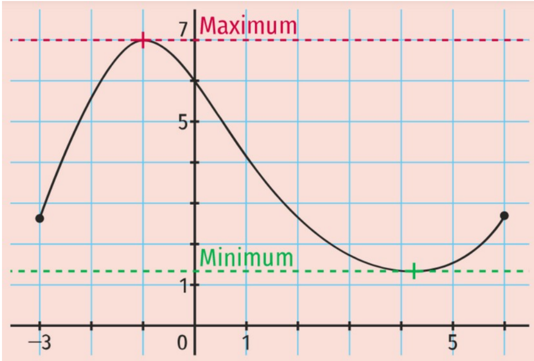
Définition (extremum) :

On dit que f admet un **minimum m** sur D lorsque :

- il existe $x_m \in D$ tel que $f(x_m) = m$,
- et $f(x) \geq m$ pour tout les autres $x \in D$.

On dit que f admet un **maximum M** sur D lorsque :

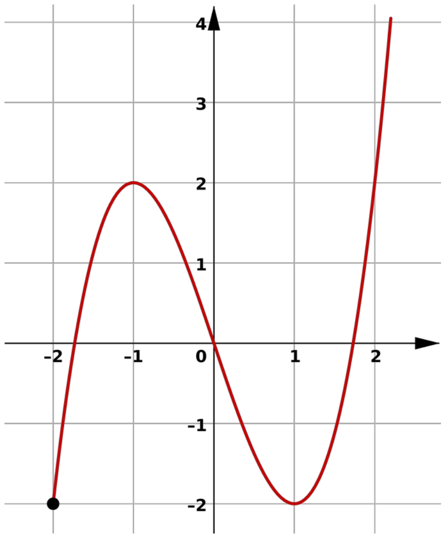
- il existe $x_M \in D$ tel que $f(x_M) = M$,
- et $f(x) \leq M$ pour tout les autres $x \in D$.



Remarque : Une fonction n'admet par obligatoirement de minimum ou de maximum.

Exemple 1 : On considère la fonction f représentée à droite.

1) Lire son ensemble de définition.
2) Préciser les valeurs des éventuels extremums.
3) Dresser le tableau de variation de f.



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

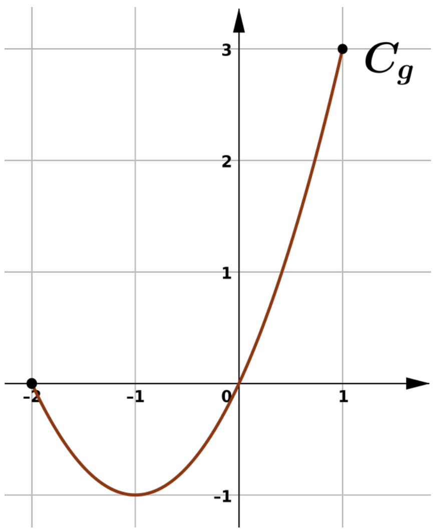
……………………………………………………………………………………………………

x	-2	-1	1	$+\infty$
variations de f				

Exemple 2 : On considère la fonction g représentée à droite.

Dresser le tableau de variation de g :

x	
variations de g	



IV Résolution d'équation et d'inéquation.

Dans cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle D et k désigne un nombre réel.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonale.

A) Résolution d'équation du type $f(x) = k$

On a déjà vu comment résoudre ce genre d'équation (voir les exercices E1, E2, E3 et E4 …).
Rappelons qu'il y a deux méthodes à connaître :

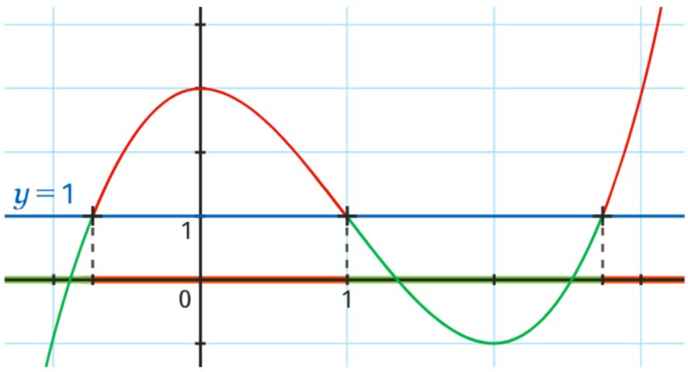
la méthode graphique & la méthode algébrique.

B) Résolution d'inéquation du type $f(x) \geq k$

Définition : Résoudre l'inéquation $f(x) \geq k$ consiste à déterminer tous les réels x de D dont l'image est supérieure ou égale à k. Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à k.

Exemple : Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

Équations	Solutions
$f(x) \geq 1$	$S = [-0{,}7\,;1] \cup [2{,}7\,;+\infty[$
$f(x) > 1$	
$f(x) \leq 1$	
$f(x) < 1$	



Méthode : pour répondre correctement à ce genre de question, il faut être attentif aux points suivants :

1) L'ensemble de définition de la fonction.
2) Les solutions se lisent sur l'axe des abscisses.
3) Entre une égalité large ou stricte, il faut sans doute retirer des solutions (par exemple en changeant le sens des crochets).
4) L'ensemble des solutions est parfois l'ensemble vide $\emptyset$ ou une solution isolée comme $\{-0{,}5\}$.

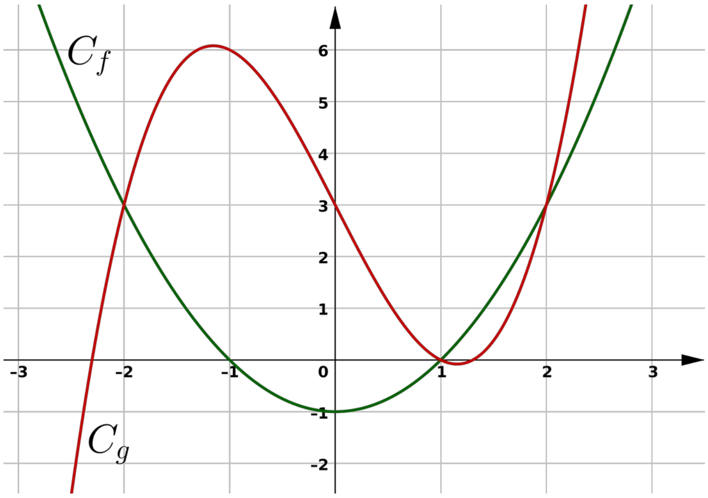
C) Résolution d'équation du type $f(x) = g(x)$

Dans cette partie, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle D. On note C_f et C_g leur courbe représentative dans un repère orthogonale.

Définition : Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g.

Exemple :

Résoudre graphiquement l'équation f(x) = g(x).



……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………