Chapitre 4 : Probabilités

I Vocabulaire et règles de bases.

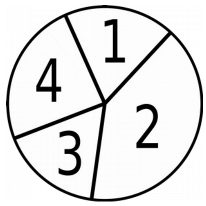
Définition :
- **Une expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
- **Une issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- **L'univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses issues possibles. Il est noté Ω.

Exemple : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le nombre obtenu.

Cette expérience aléatoire a ………………………………………………………..

L'univers associé à cette expérience est : …………………………………………………………………….

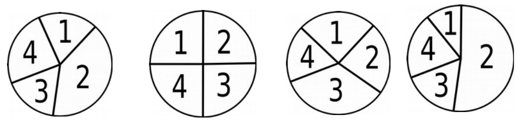
Exemple : On lance au hasard une fléchette sur la cible à droite et on observe le chiffre de la zone atteinte par la fléchette (on suppose que la fléchette tombe forcément sur la cible).



L'univers associé à cette expérience est : ……………………………………………………………………………..

On note p_1 la probabilité de tomber sur 1, p_2 celle de tomber sur 2, p_3 celle de tomber sur 3,et p_4 celle de tomber sur 4.

Ces nombres peuvent avoir différentes valeurs selon la cible utilisée …



Peut-on avoir n'importe quelles valeurs pour p_1, p_2, p_3 et p_4 ? …………………………………………………………………….

Définition : Définir une **loi de probabilité** pour une expérience d'univers $\Omega = \{x_1 \, ; \, x_2 \, ; \, ... \, ; \, x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues x_i un nombre p_i (sa probabilité) en respectant deux règles :

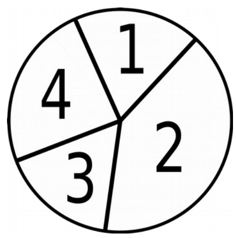
Règle 1 : $0 \leq p_i \leq 1$ *Règle 2 :* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

II Modélisation

Définition : Faire une **modélisation**, c'est associer une **loi de probabilité** à une **situation réelle.**

Modélisation : proposer une loi de probabilité pour l'expérience aléatoire associée à la cible suivante :

Cette loi doit : respecter les règles 1 et 2 & être réaliste par rapport à la cible utilisée



Les issues (l'univers)				
Les probabilités				

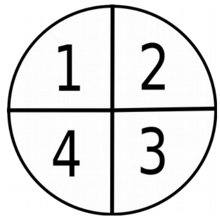
II.1 Modélisation avec l'hypothèse d'équiprobabilité

Définition : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables .

Dès que cela semblera réaliste, on fera l'hypothèse que les issues sont équiprobables, car cela nous permet de calculer facilement les probabilités.

Propriété (La lettre n désigne une nombre entier supérieur à 1)
Pour une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1 \,;\, x_2 \,;\, \ldots \,;\, x_n\}$, si on suppose que les n issues sont équiprobables, alors la probabilité de chacune de ces issues vaut $1/n$.

Modélisation : On lance une fléchette sur la cible à droite et on observe le chiffre de la zone atteinte.



L'hypothèse d'équiprobabilité est-elle réaliste ? …………………………………………………..

Proposer une loi de probabilité pour cette expérience aléatoire (faire une modélisation)

Les issues (l'univers)				
Les probabilités				

Remarque : l'hypothèse d'équiprobabilité est parfois approximative. Même pour un dé de grande qualité, la probabilité de tomber sur 6 n'est jamais vraiment égale à $\frac{1}{6}$ (mais elle peut être très proche).

II.2 Modélisation avec une étude statistique

Propriété : En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de prendre cette valeur comme probabilité de l'issue.

Considérons une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1 \,;\, x_2 \,;\, x_3 \,;\, x_4 \,;\, x_5 \,;\, x_6\}$.
Il y a 6 issues, ce qui peut nous faire penser au résultat d'un lancer de dé à 6 faces.

On souhaite modéliser cela avec une loi de probabilité en sachant que :
- l'hypothèse d'équiprobabilité ne semble pas réaliste (le dé semble truqué)
- nous ne connaissons pas les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6

On répète 1000 fois l'expérience et on compte le nombre d'apparitions de chaque issue.
Utilisons cette information pour définir une loi de probabilité pour cette expérience aléatoire :

Les issues	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
nombre d'apparition	200	150	200	50	290	110
Probabilité						

La règle 2 est-elle respectée ? …….

III Évènements d'une expérience aléatoire.

Définition : Dans une expérience aléatoire :

- **Un évènement A est un ensemble d'issues** : c'est une partie de l'univers Ω.
- Dire qu'une issue x_i **réalise l'évènement** A signifie que x_i est un élément de A.
- Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.

Exemple, on lance un dé à 6 faces : $\Omega =$ ....

L'événement A : « obtenir un nombre pair » est réalisé par les issues $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.
L'événement B : « obtenir un 5» est un événement élémentaire.
L'événement C : « obtenir un 7 » est un évènement impossible .
L'événement D : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 6» est un événement certain.

Écriture ensembliste des événements : ....

....

Définition : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Propriété : Pour tout évènement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$. De plus, $P(\emptyset) =$ et $P(\Omega) =$

Propriété : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'événement A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple : On lance un dé à 6 faces non truqué.
On cherche la probabilité de l'évènement B : « obtenir un multiple de 3 ».

....

....

....

....

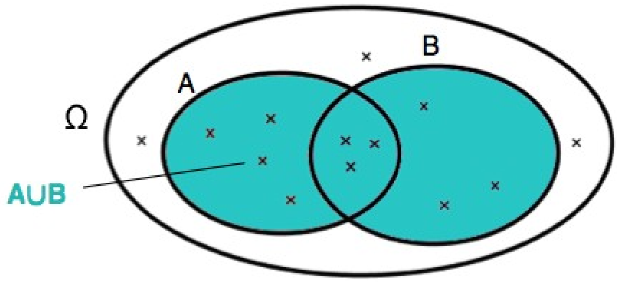
IV Réunion, intersection et événement complémentaire

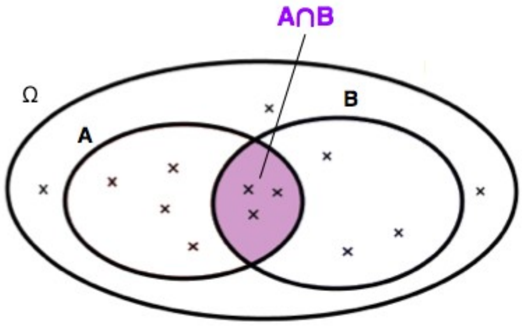
Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

- La réunion de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux).
Ce nouvel événement se note $A \cup B$. *On dit souvent que c'est A « union » B.*

- L'intersection de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.
Ce nouvel événement se note $A \cap B$. *On dit souvent que c'est A « inter » B*

- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$





Exemple : On choisit au hasard une lettre de l'alphabet.
(on dira qu'une lettre est « plus grande » qu'une autre lettre si elle vient après dans l'ordre alphabétique)

L'univers est $\Omega = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m; n; o; p; q; r; s; t; u; v; w; x; y; z\}$

Considérons les événements A : « obtenir une voyelle »
B : « obtenir une lettre strictement plus grande que t »

Les écritures ensemblistes sont : ....

....

En écriture ensembliste, on a $A \cup B =$ ....

$A \cap B =$ ....

L'événement A et l'événement C : « Obtenir un b un c ou un d » sont incompatibles :

....

Remarque : Si les événements A et B sont **incompatibles** alors $P(A \cap B) = 0$.

Propriété : Soient A et B deux événements. On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Propriété (conséquence directe) :
Si les deux événements A et B sont incompatibles $P(A \cap B) = 0$ et donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Application :

On a demandé à 180 personnes quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard l'une des personnes ayant participé à cette étude.
On considère les deux événements A : « la personne choisie préfère les films d'action»
et F : « la personne choisie est une fille »

Calculer $P\left(A\cap F\right)$ et $P\left(A\cup F\right)$

....

....

....

....

....

....

....

Définition :
L'événement complémentaire de A est l'événement, noté $\overline{A}$, qui est formé de toutes les issues qui ne réalisent pas A. Autrement dit, $A\cap\overline{A}=\emptyset$ et $A\cup\overline{A}=\Omega$

Exemple : On lance un dé à 6 faces.
Considérons l'événement A : « obtenir un nombre pair » (en écriture ensembliste A = { 2 ; 4 ; 6})

Le complémentaire est $\overline{A}$: ....

On a bien $A\cap\overline{A}=\emptyset$ et $A\cup\overline{A}=\Omega$

Propriété : Pour tout événement A, on a $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$

Exemple : On joue à pile ou face avec une pièce qui tombe les 3/4 du temps sur Pile.
Si on considère l'événement A : « tomber sur Pile » alors $\overline{A}$ est l'événement « ne pas tomber sur Pile »
Autrement dit $\overline{A}$ est l'événement « tomber sur Face ».
D'après la formule : P(« tomber sur Face ») = $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

Cette pièce tombe sur Face dans 25 % des cas.