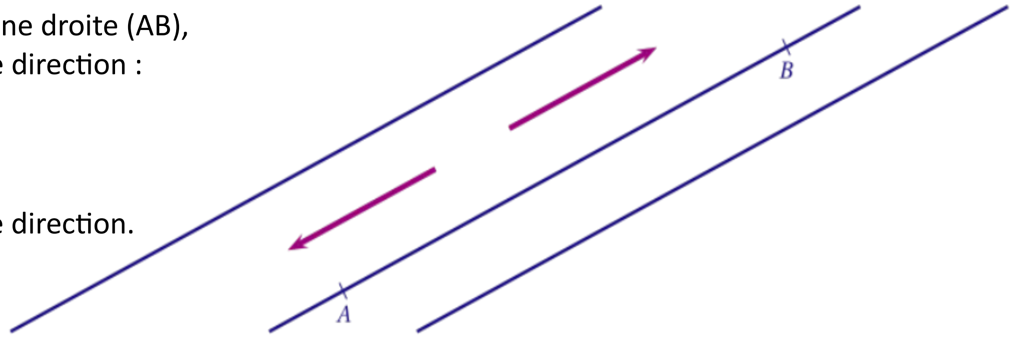
Chapitre 5 : Vecteurs

I. La notion de vecteur :

Définition : direction et sens.
Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont la même **direction**.

Lorsqu'une direction est donnée par une droite (AB),
il y a deux **sens** de parcours dans cette direction :
soit de A vers B , soit de B vers A.



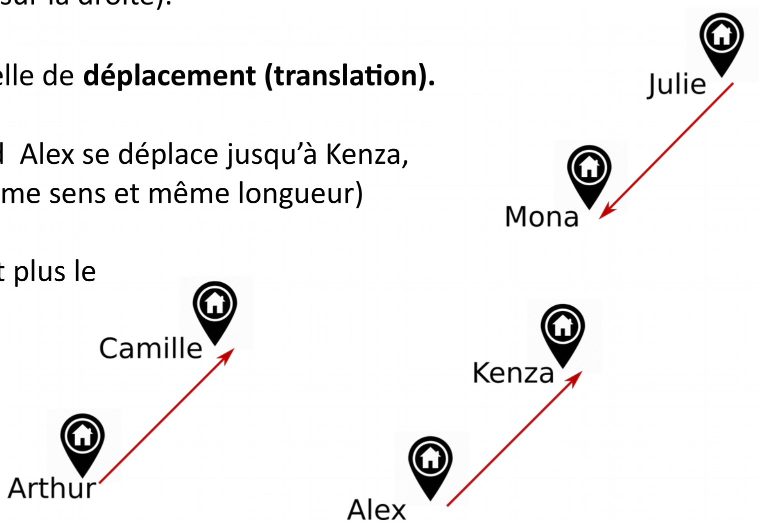
À retenir :
a) Donner une droite c'est donner une direction.
b) Deux droites parallèles donnent
la même direction.

Définition :
Définir un vecteur, c'est donner les trois informations suivantes :
la direction du vecteur (un droite),
le sens du vecteur (l'un des deux sens de la droite),
la longueur du vecteur (la longueur d'un segment sur la droite).

Remarque : la notion de vecteur est associée à celle de **déplacement (translation).**

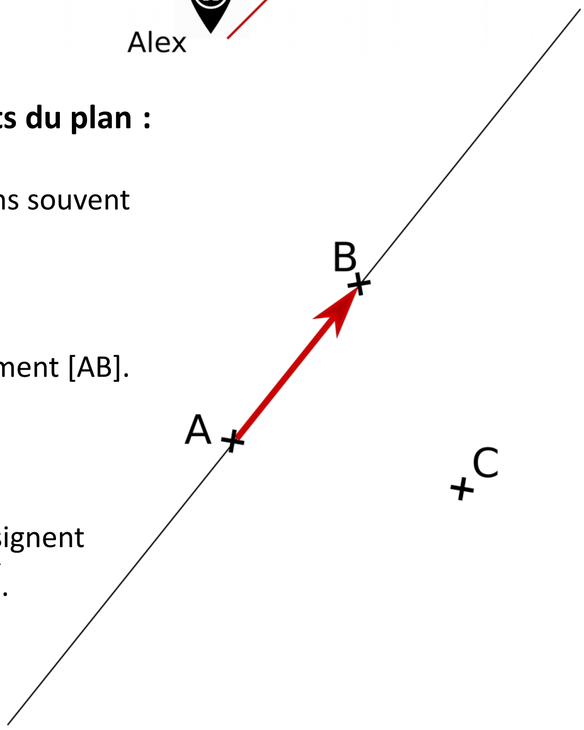
Quand Arthur se déplace jusqu'à Camille ou quand Alex se déplace jusqu'à Kenza,
ils utilisent le même vecteur (même direction, même sens et même longueur)

Mais quand Julie se déplace jusqu'à Mona, ce n'est plus le
même vecteur (le sens est différent).



On peut définir un vecteur en donnant seulement deux points du plan :

Notation : Étant donnés deux points A et B du plan, nous utiliserons souvent la notation $\overrightarrow{AB}$ pour désigner un vecteur. Cela signifie que :
- la direction du vecteur est celle de la droite (AB),
- le sens du vecteur est celui de A vers B,
- la longueur du vecteur est la longueur AB du segment [AB].



Convention (quand les deux points sont les mêmes ?)
On convient que toutes les notations $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ on encore $\overrightarrow{CC}$ désignent toutes le même vecteur. On l'appelle le **vecteur nul** et on le note $\overrightarrow{0}$.

Ainsi , $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{0}$

II. Vecteurs égaux

Définition : Soient quatre points A,B, C et D du plan, les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

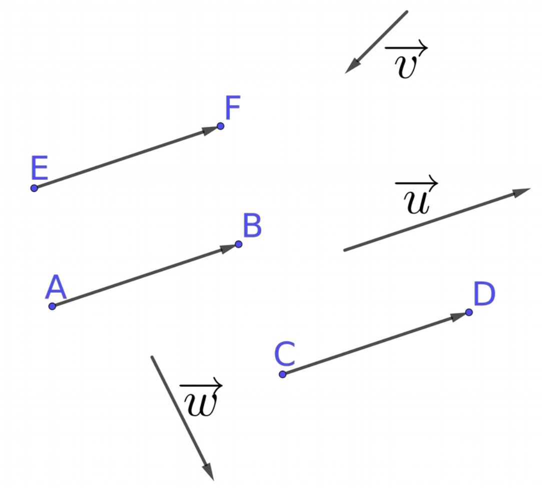
……

……

……

Remarque : Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie aussi que la **translation** qui transforme A en B, transforme également C en D (c'est le même déplacement) . On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

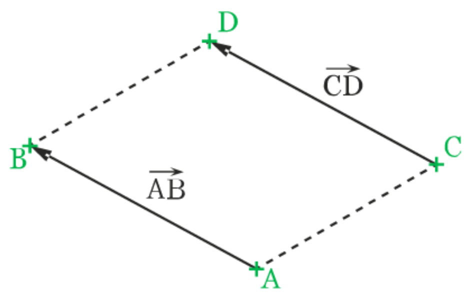
Notation : Plutôt que d'utiliser des couples de points donnant tous le même vecteur, on utilisera souvent les notations plus courte $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou encore $\vec{w}$. Dans la figure à droite les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont tous égaux au vecteur $\vec{u}$.



………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Propriété 1 : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux **si et seulement si** le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).
(attention à l'ordre des points)



Exemples :

Si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ alors …………………………… est un parallélogramme.

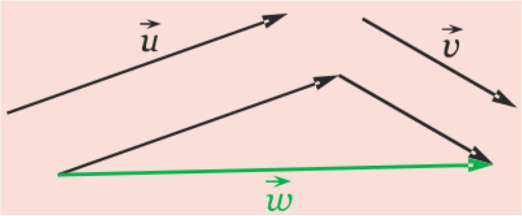
Si $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{UZ}$ alors …………………………… est un parallélogramme.

Si QRST est un parallélogramme alors ………………………………………………………………

Propriété 2 : Soient A et B deux points distincts du plan.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ **si et seulement si** M est le milieu de [AB].

III. Somme de vecteurs

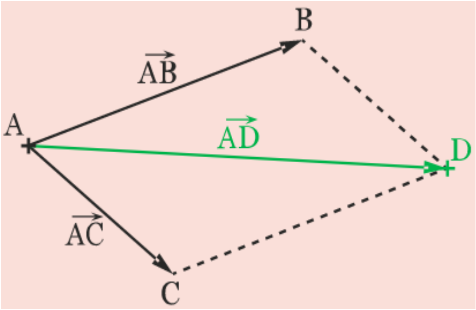
Les vecteurs peuvent être additionnés exactement comme les nombres.
Pour cela, il suffit d'enchaîner les déplacements...



Définition (de l'addition de deux vecteurs) :
La translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ nous donne un nouveau vecteur $\vec{w}$ et on note cela $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$

Définition (de l'opposé d'un vecteur) : L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui a la même direction , la même longueur, mais un sens contraire. On le note $-\overrightarrow{AB}$ et on peut vérifier que $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

Un premier exemple d'addition :
Soient deux points A et B, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=$ ....



Propriété 3 (relation de Chasles)

Soient A,B,C et D quatre points du plan, alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

Propriété 4 (propriété du parallélogramme)

Soient A,B,C et D quatre points du plan, alors :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Démonstration de la propriété 4 :

....

....

....

....

....

....

....

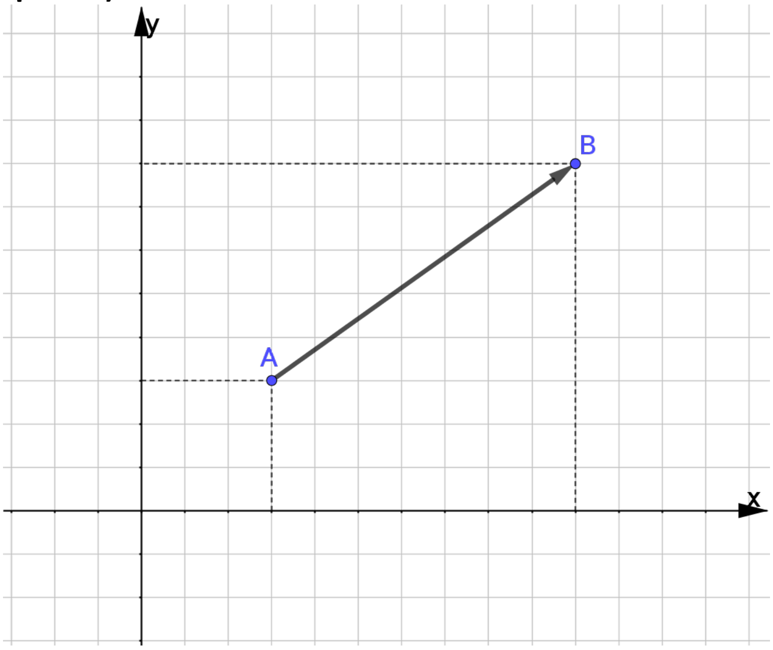
IV. Vecteur, repère et coordonnées

Définition (coordonnées d'un vecteur) : Dans un repère (O ; I, J) du plan, **les coordonnées** du vecteurs $\vec{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Notation : Si les coordonnées du points M sont notées $(x; y)$, celles du vecteur seront souvent notées verticalement pour bien faire la distinction : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Propriété 5 (trouver les coordonnées avec deux points) :

1) Dans un repère, si on considère deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par la formule : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



2) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Propriété 6 (coordonnées d'une somme de vecteurs).

Soient $\overrightarrow{r}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{s}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère du plan.

Les coordonnées du vecteur somme $\vec{r} + \vec{s}$ sont alors $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

V. Vecteurs colinéaires

Définition :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel λ non nul tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Exemples : A et B sont deux points distincts du plan et $\vec{u}$ est un vecteur non nul du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (ici, $\lambda = 2$)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $0,75\,\vec{u}$ sont colinéaires. Même chose pour les vecteurs $\vec{u}$ et $-0,5 \times \vec{u}$

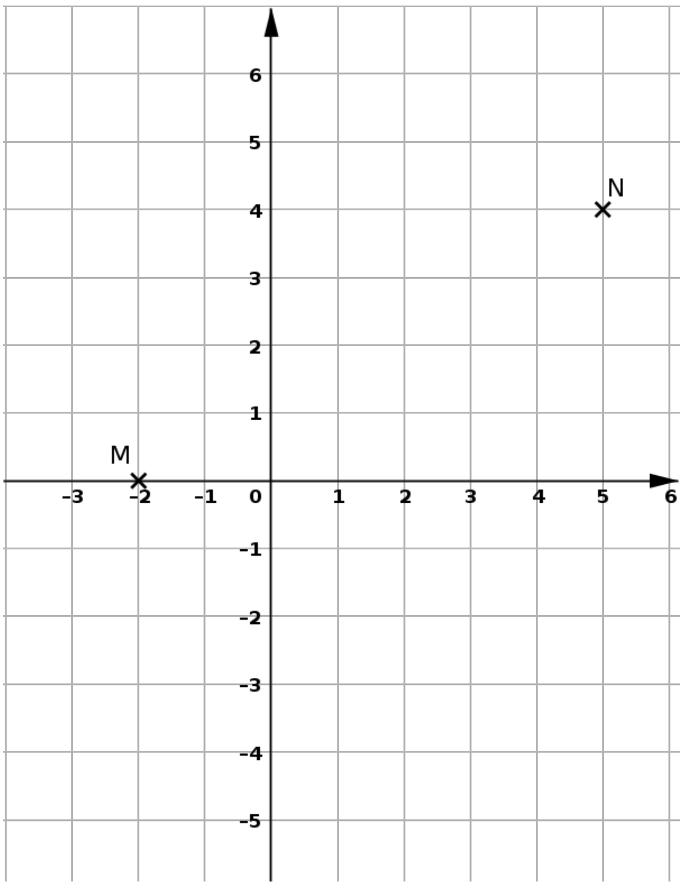
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{BA} = (-1) \times \overrightarrow{AB}$ (ici, $\lambda = -1$) .

Propriété : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple : Considérons un repère (O ; I,J) et trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\-9\end{pmatrix}$

Décrire la relation multiplicative entre les coordonnées de ces trois vecteur **colinéaires** :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ---------- > $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$	$\vec{v} = \cdots \times \vec{u}$
$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ --------- > $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\-9\end{pmatrix}$	$\vec{w} = \cdots \times \vec{u}$
$\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ ---------- > $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	$\vec{u} = \cdots \times \vec{v}$



<u>Sur le graphique à droite :</u>

- Tracer un représentant de $\vec{u}$ partant de l'origine du repère.
- Tracer un représentant de $\vec{v}$ dont l'origine est le point M
- Tracer un représentant de $\vec{w}$ dont l'origine et le point N.

Propriété 7 (parallélisme) : A, B, C et D sont quatre points du plan.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.