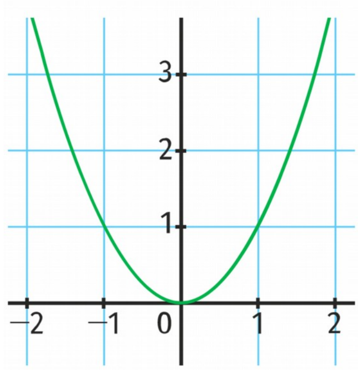
Chapitre 6 : fonctions de référence.

I. Les fonctions carré et racine carrée



Définition (fonction carré) :
La fonction carré est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe le réel x^2.
Sa courbe représentative est une parabole.

Ainsi, x^2 est .... de x par la fonction carré.

Ainsi, x est .... de x^2 par la fonction carré.

Propriété 1: Comme $x^2 \geq 0$ pour tout réel x. **La fonction carré est une fonction positive.**

Conséquence géométrique :
La courbe représentative de la fonction carré est ....

Propriété 2: Comme $x^2 = (-x)^2$ pour tout réel x, **la fonction carré est une fonction paire** (tout les nombres x ont la même image que leur opposé $-x$)

Conséquence géométrique :
La courbe représentative de la fonction carré est ....

Propriété 3 : la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

Finalement, le **tableau de variation** de la fonction carré est :

$\mathbf{x}$	
$\mathbf{x}^2$	

Définition (fonction racine carrée)
Pour tout nombre réel **POSITIF** x, la racine carrée de x est le nombre **POSITIF**, noté $\sqrt{x}$, tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.
La fonction racine carrée est la fonction qui, à tout réel **positif** x, associe le réel $\sqrt{x}$.

Remarque : la fonction racine carrée n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $[0; +\infty[$. La raison est simplement que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas (pourquoi?).

Propriété 4 :
1) $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1.$

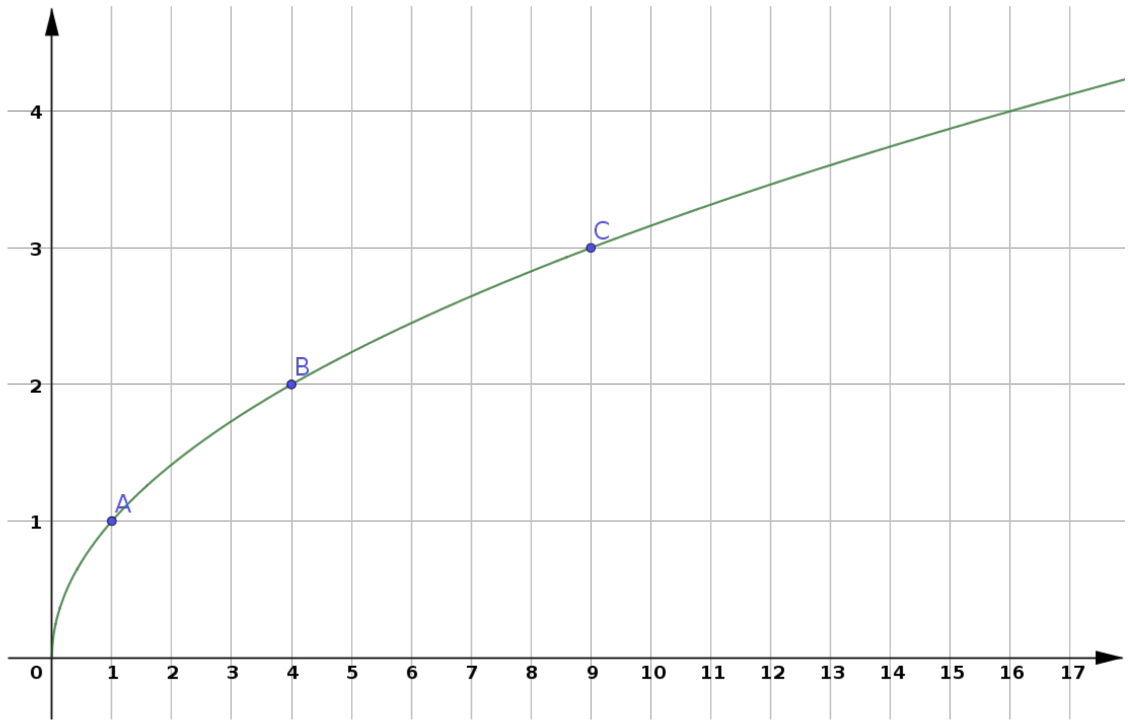
2) Pour tous réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$ De plus, si $b \neq 0,$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

Propriété 5 : La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.
En d'autres termes, si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (l'ordre est conservé).

D'après la propriété 5, le tableau de variation de la fonction racine carrée est

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de f	$0 \nearrow$

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction racine carrée a la forme suivante :



L'origine du repère appartient à la courbe d'après la propriété 4. Idem pour le point A(1 ; 1).
Le point B(4 ; 2) appartient à la courbe car $\sqrt{4} = 2.$
Le point C(9 ; 3) appartient à la courbe car $\sqrt{9} = 3.$

Exercice corrigé 1 : x est un nombre réel.

1) Si $2 < x \leq 8$, déterminer un encadrement de **a)** x^2 **b)** $5x^2$ **c)** $x^2 - 10$ **d)** $-3x^2$

2) Si $-5 \leq x \leq -2$, déterminer un encadrement de **a)** x^2 **b)** $10x^2$ **c)** $4x^2 + 10$ **d)** $-3x^2$

Correction ex_corr_1 :

1a) $4 < x^2 \leq 64$ **1b)** $20 < x^2 \leq 320$ **1c)** $-6 < x^2 - 10 \leq 54$

1d) $-192 \leq x^2 < -12$ *attention, on change l'ordre quand on multiplie par un négatif*

Pour la partie 2, rappelez vous que la fonction carrée est décroissante sur $[-\infty; 0[$ *(penser à la courbe).*

2a) $4 \leq x^2 \leq 25$ **2b)** $40 \leq x^2 \leq 250$ **2c)** $26 \leq 4x^2 + 10 \leq 110$ **2d)** $-75 \leq -3x^2 \leq -12$

Exercice corrigé 2 : x est un nombre réel. Dans chaque cas, donner un encadrement de x^2, ou une inégalité vérifiée par x^2 :

a) $-3 \leq x \leq 2$ **b)** $x > -4$ **c)** $x < -1,5$

Correction ex_corr_2 :

a) On peut reformuler la question: quels sont le minimum et le maximum de la fonction carré sur $[-3; 2]$?

Si on fait le tableau de variation de la fonction carrée sur $[-3; 2]$, on a

x	-3		0		2
variations de la fonction carré	9	↘	0	↗	4

Donc le maximum est 9 et le minimum est 0.

Donc la réponse est $0 \leq x^2 \leq 9$

b) $x^2 \geq 0$ *(sur l'intervalle* $]-4; +\infty[$ *le minimum est 0 et il n'y a pas de maximum).*

c) $x^2 > 2,25$ *(en d'autres termes* $x^2 \in]2,25\,; +\infty[$ *)*

Exercice corrigé 3

Compléter avec < ou > et justifier.

a) $\sqrt{1,98}$ .... $\sqrt{1,95}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ .... 1 **c)** $\sqrt{\pi^2}$ .... $\sqrt{9}$

Correction ex_corr_3 :

a) $\sqrt{1,98}$ > $\sqrt{1,95}$ car la fonction racine carrée est croissante et 1,98 > 1,95.

b) $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ < 1 car $\dfrac{4}{5} < 1$ et comme la fonction racine carré est croissante on a $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$ < $\sqrt{1} = 1$.

c) $\sqrt{\pi^2}$ > $\sqrt{9}$ car d'après la définition de la racine carrée $\sqrt{\pi^2} = \pi$ et $\sqrt{9} = 3$ (et $\pi > 3$).

Exercice corrigé 4 (fonction racine carrée):

1) Déterminer les images par la fonction racine carrée des nombres suivants :

a) 81 **b)** 10 000 **c)** 1 **d)** 0

2) Déterminer le ou les antécédents par la fonction racine carrée des nombres suivants :

a) 4 **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** -25

Correction ex_corr_4 :

1) **a)** $\sqrt{81} = 9$ **b)** $\sqrt{10000} = 100$ **c)** $\sqrt{1} = 1$ **d)** $\sqrt{0} = 0$

2) **a)** 16 est le seul antécédent de 4 ($\sqrt{16} = 4$)

b) Le seul antécédent de $\frac{3}{5}$ est $\frac{9}{25}$.

En effet, $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ d'après la propriété 4 du cours et donc on a bien $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

c) -25 n'a pas d'antécédent car la fonction racine carré ne donne que des images positives *(La courbe (voir cours) est toujours au dessus de l'axe des abscisses)*

Exercice corrigé 5 (fonction racine carrée):

1) On considère la fonction racine carrée et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère (O ; I, J) . Indiquer, dans chacun des cas, si le point appartient à la courbe. Justifier.

A(4 ; 2) B(3 ; 9) C(1,44 ; 1,2) D(-16 ; 4)

2) Dans chacun des cas, indiquer l'ensemble de définition D_f de la fonction f. Justifier.

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{-x}$

Correction ex_corr_5:

1) $A \in \mathcal{C}$ car $\sqrt{4} = 2$

$B \notin \mathcal{C}$ car $\sqrt{3} \neq 9$ *(par contre B est sur la courbe de la fonction carré)*

$C \in \mathcal{C}$ car $\sqrt{1,44} = 1,2$

$D \notin \mathcal{C}$ car la fonction racine carrée n'est pas définie en $x = -16$ ($\sqrt{-16}$ n'existe pas!)

2) *La fonction racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs (voir la définition). Donc ce qui est sous la racine* $\sqrt{}$ *doit être positif !!*

a) f est définie pour tout réel x tel que $x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$. ($\iff$ signifie « est équivalent à »)
L'ensemble de définition de la fonction f est donc $D_f = [-2\,;\,+\infty[$.

b) Pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$. Donc l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$.

c) f est définie pour tout réel x tel que $-x \geq 0 \iff x \leq 0$.

Donc l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty\,;\,0]$.

II. La fonction inverse.

Définition (inverse d'un nombre) : L'inverse d'un nombre x est le nombre y tel que $x \times y = 1$.

Propriétés 6 : a) 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse.

b) Pour tout nombre x différent de 0, l'inverse de x est le nombre $\frac{1}{x}$.

c) L'inverse d'un nombre écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ (avec a et b non nuls) est le nombre $\frac{b}{a}$.

Démonstration :

a) Quel que soit le nombre y on a toujours $0 \times y = 0$ et donc on a jamais $0 \times y = 1$ (0 n'a pas d'inverse).

b) Si $x \neq 0$ on a toujours $x \times \frac{1}{x} = \frac{x \times 1}{x} = \frac{x}{x} = 1$ donc $\frac{1}{x}$ est bien l'inverse de x.

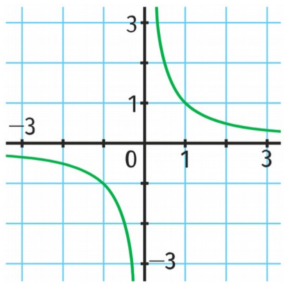
c) Réfléchir par vous même ...

Exemple : l'inverse du nombre 2,5 est le nombre $\frac{1}{2,5}$. L'inverse du nombre $\frac{2}{-3}$ est le nombre $\frac{-3}{2}$.

Attention ! *Ne pas confondre l'**inverse** d'un nombre et l'**opposé** d'un nombre.*

Notation: L'ensemble $\mathbb{R}^*$ contient tous les nombres sauf 0. Autrement dit $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\ \bigcup\ ]0\,;\,+\infty[$.

Définition (la fonction inverse) :
La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ qui , à tout réel x différents de 0, associe son inverse $\frac{1}{x}$. Sa courbe représentative est une hyperbole :



(retenez bien la forme de cette courbe)

Définition : une fonction **IMPAIRE** est une fonction f telle que, pour tout nombre x de son ensemble de définition $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence géométrique :
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Attention ! *Ne pas confondre les fonctions **IMPAIRES** avec les fonctions **PAIRES.***

Propriété 7: Comme $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ pour tout réel x, **la fonction inverse est une fonction impaire.**
(Sa courbe représentative dans un repère est symétrique par rapport à l'origine du repère)

Propriété 8 (pour la retenir, retenir la forme de la courbe représentative)
La fonction inverse est strictement **décroissante** sur $]-\infty\,;\,0[$ et strictement **décroissante** sur $]0\,;\,+\infty[$.

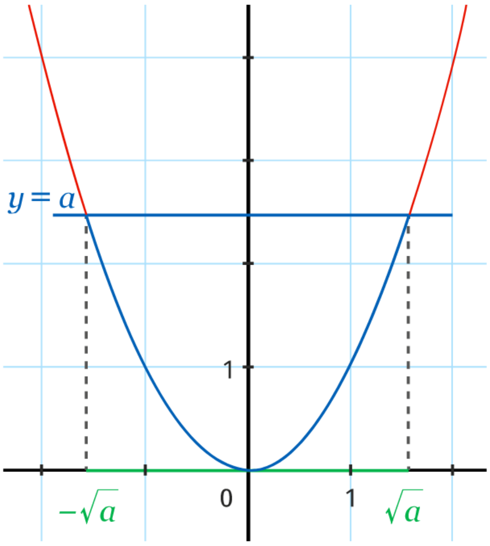
Attention ! *La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Par exemple $-2 < 3$ et $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$.*
(l'ordre n'est pas inversé)

III Équation et inéquation (Ici, il s'agit de la fonction carré $f(x)=x^2$)

Propriété 9 : On considère **l'équation** $\mathbf{x^2 = a}$ avec a un nombre réel.
Selon la valeur de a, l'équation peut ne pas avoir de solution ou en avoir plusieurs :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$ l'équation a une unique solution : c'est 0.
- Si $a > 0$ l'équation a deux solutions : ce sont $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

On retient cette propriété en retenant le dessin à droite ---- >



Propriété 10 : On considère **l'inéquation** $\mathbf{x^2 \leq a}$ avec a un nombre réel.

- Si $a < 0$, l'inéquation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$ l'inéquation a une unique solution : c'est $x = 0$.
- Si $a > 0$ l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}]$

À nouveau, tout cela est justifié par le dessin à droite ---- >

Exercice corrigé 6

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les **équations** suivantes *(en d'autres termes : trouver les $x \in \mathbb{R}$ qui marchent)*

a) $x^2 = 7$ **b)** $x^2 = 0$ **c)** $x^2 = 121$ **d)** $x^2 = -2$ **e)** $x^2 = \pi^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les **inéquations** suivantes *(en d'autres termes : trouver les $x \in \mathbb{R}$ qui marchent)*

a) $x^2 \leq 9$ **b)** $x^2 < 25$ **c)** $x^2 < 13$ **d)** $x^2 \geq 9$ **e)** $x^2 \leq -1$

Correction ex_corr_6 *(pensez au dessin ci-dessus)*

1)	**2)**
a) $S = \{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\}$	**a)** $S = [-3\,;\,3]$
b) $S = \{0\}$	**b)** $S =]-5\,;\,5[$ *attention: les crochets sont ouverts car -5 et 5 ne sont pas solutions*
c) $S = \{-11\,;\,11\}$	**c)** $S =]-\sqrt{13}\,;\,\sqrt{13}[$ *(même remarque)*
d) $S = \emptyset$ *(pas de solution car -2 < 0)*	**d)** $S =]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$ *ici l'inéquation a changé de sens*
e) $S = \{-\pi\,;\,\pi\}$	**e)** $S = \emptyset$ *« un carré n'est jamais négatif … »*

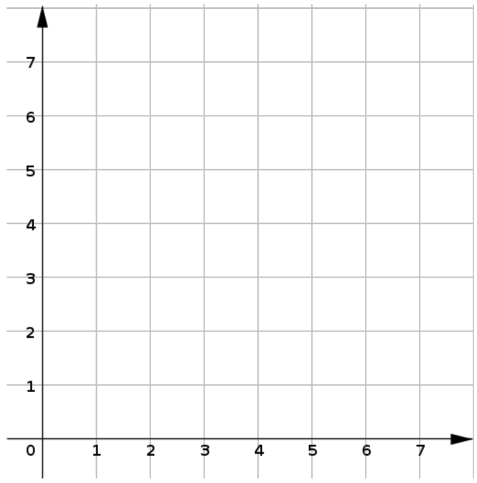
IV Position des courbes sur $\mathbb{R}^+$.

Objectif : comparer trois fonctions : la fonction identité $i(x) = x$ *(celle qui ne fait rien)*
la fonction carré $c(x) = x^2$
la fonction racine carrée $r(x) = \sqrt{x}$

On veut savoir laquelle de ces fonctions est la plus grande sur un intervalle donné ...

Remarque : Notre étude est restreinte à l'ensemble $\mathbb{R}^+$. On rappelle que $\mathbb{R}^+ = [0\,;\,+\infty[$.

Avant toute chose, réfléchissez à la question suivante : Quelle est la courbe de la fonction identité $i(x) = x$ dans un repère orthonormée ? Essayer de la dessiner dans le repère à droite ------------------------------- >



Je ne vous donnerai pas la réponse à cette question, vous pouvez facilement la trouver par vous même en vous rappelant la définition de la courbe d'une fonction. (cf activité d'introduction)

On peut déjà remarquer certaines choses :
Pour le nombre 0,5 on a $0,5^2 < 0,5 < \sqrt{0,5}$ (calculatrice). En d'autres termes $c(0,5) < i(0,5) < r(0,5)$
Pour le nombre 1, on a $1^2 = 1 = \sqrt{1}$ et donc $c(1) = i(1) = r(1)$ (les courbes se croisent).
Pour le nombre 2 on a $2^2 > 2 > \sqrt{2}$. En d'autres termes $c(2) > i(2) > r(2)$

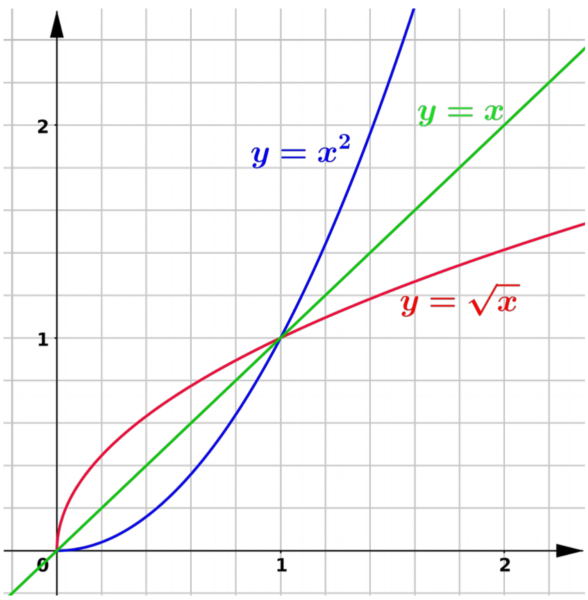
L'ordre semble s'inverser en $x = 1$ ...

Propriété 11 : Soit x un réel positif ou nul

a) Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $x^2 = x = \sqrt{x}$
(en d'autres termes $c(x) = i(x) = r(x)$).

b) Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x < \sqrt{x}$
(en d'autres termes $c(x) < i(x) < r(x)$).

c) Si $x > 1$ alors $x^2 > x > \sqrt{x}$
(en d'autres termes $c(x) > i(x) > r(x)$).



***À nouveau, la meilleur manière de retenir cette propriété** est de bien retenir le dessin à droite et de remarquer que :*
*- Les trois courbes se croisent en x=0 et en x=1 . C'est le point **a)**.*
*- Sur l'intervalle]0 ; 1 [la bleu est en dessous, puis vient la verte et enfin rouge. C'est le point **b)**.*
*- Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ c'est l'inverse : rouge d'abord puis vert en enfin bleu. C'est le point **c)**.*

Exercice corrigé 7 : Ranger dans l'ordre croissant les trois nombres positifs suivants :

1) π^2 ; π ; $\sqrt{\pi}$

2) $\frac{x}{5}$; $\left(\frac{x}{5}\right)^2$; $\sqrt{\frac{x}{5}}$ où x est un nombre positif strictement inférieur à 5 ($0 < x < 5$).

3) $x + 0,8$; $(x + 0,8)^2$; $\sqrt{x + 0,8}$ où x est un nombre tel que $0,3 < x < 0,4$

Correction ex_corr_7 **(on utilise la propriété 11)**

1) Comme $\pi > 1$ la réponse est $\sqrt{\pi} < \pi < \pi^2$ *(propriété 11 c))*

2) Comme $0 < x < 5$ alors $0 < \frac{x}{5} < 1$ et donc $\left(\frac{x}{5}\right)^2 < \frac{x}{5} < \sqrt{\frac{x}{5}}$ *(propriété 11 b))*

3) Comme $0,3 < x < 0,4$ alors $1,1 < x + 0,8 < 1,2$ et en particulier , $x + 0,8 > 1$.

Donc $\sqrt{x + 0,8} < x + 0,8 < (x + 0,8)^2$ *(propriété 11 c))*