Chapitre 7 : fonctions affines

I. Définition et vocabulaire

Avant de donner la définition des fonctions affines, commençons par répondre brièvement à la question suivante :

Pourquoi étudie-t-on les fonctions affines ?

Raison 1 : Elles sont très présentes dans la vie courante et en science.

Raison 2 : Les fonctions affines sont en quelques sortes <u>les fonctions les plus simples</u> que l'on puisse imaginer. Pour cette raison, ce sont aussi les plus importantes et il faut bien les connaître.

Définition 1 (fonction affine) : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

Exemples : $f(x) = 3x + 10$ $\quad g(x) = -0,4x - \dfrac{1}{2}$ $\quad h(x) = 0x + 0$ $\quad k(x) = x + \pi$

Vocabulaire (important) :
L'écriture $f(x) = mx + p$ s'appelle la **forme algébrique** de la fonction affine f.
Le nombre $\mathbf{m}$ est le **coefficient directeur** de f.
Le nombre $\mathbf{p}$ est **l'ordonnée à l'origine** de f.

Pourquoi ces fonctions sont elles « les plus simples » ?

Définir une fonction c'est écrire f(x) = … quelque chose avec x … Nous avons vu par exemple :

$f(x) = x^2$ *on met* x *au carré ///* $f(x) = \sqrt{x}$ *on prend la racine de* x *///* $f(x) = 1/x$ *on divise par* x

et il existe des centaines d'exemples plus ou moins compliqués …

Demandons nous maintenant quelles sont les opérations les plus simples que l'on peut faire sur x *?*
------ > Il s'agit bien sûre des additions et des multiplications !

Or, dans une fonction affine $f(x) = mx + p$ *on ne fait rien d'autre que : multiplier* x *par le nombre* m
ajouter le nombre p

Selon les valeurs de m et de p on peut avoir des formes encore plus simples.

Définition 2 : Soient m et p deux nombres réels et $f(x) = mx + p$ une fonction affine.

- Si $m = 0$, alors $f(x) = p$ pour tout x et on dit que c'est une **fonction constante**
  (le résultat ne dépend pas de x*)*

- Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$ et on parle de **fonction linéaire**
(celles que l'on retrouvent dans les situations de proportionnalité)

Un exemple concret :

Une place de cinéma coûte 10€ mais on peut également prendre une carte abonnement à l'année.
Cette carte coûte 60€ et avec elle, une séance est à 5€ au lieu de 10€.

Supposons que j'aille voir 7 films dans l'année :

Sans la carte d'abonnement, cela me coûtera 10×7 €
Avec la carte d'abonnement, cela me coûtera $5 \times 7 + 60$ €

Supposons que j'aille voir x films dans l'année (on ne connaît pas x) :

On note f la fonction qui donne le prix en fonction du nombre x de films vus :

Sans la carte d'abonnement, cela me coûtera $f(x) = 10 \times x$ €
Avec la carte d'abonnement, cela me coûtera $f(x) = 5 \times x + 60$ €

Dans les deux cas, il s'agit de fonctions affines.
Sans carte d'abonnement, c'est même une fonction linéaire: $f(x) = 10x + 0$ (l'ordonnée à l'origine est 0)

Exercice corrigé 1 (*déterminer une image ou m ou p en connaissant les deux autres*):

Soient m et p deux nombres réels (pour l'instant on ne les connaît pas)
Soit f une fonction affine de coefficient directeur m et d'ordonnée à l'origine p.

1) Déterminer $f(4)$ lorsque $m = -5$ et $p = 2$
2) Déterminer $f(-3)$ lorsque $m = -2$ et $p = 0$
3) Déterminer p lorsque $f(5) = 3$ et $m = 4$

Correction ex_corr_1

1) D'après les informations, la forme algébrique de f est $f(x) = -5x + 2$
Donc $f(4) = -5 \times 4 + 2$
Donc $f(4) = -18$

2) D'après les informations, la forme algébrique de f est $f(x) = -2x$ (fonction linéaire)
Donc $f(-3) = -2 \times (-3)$
Donc $f(-3) = 6$

3) On sait que $f(x) = mx + p$ et comme $m = 4$, on a $f(x) = 4x + p$. On cherche le nombre p.

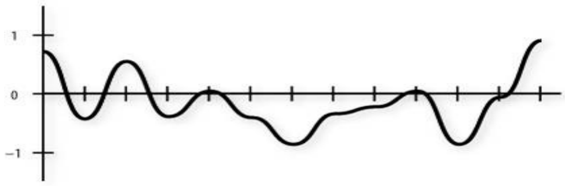
Pour cela, on nous donne $f(5) = 3$. Autrement dit $3 = 4 \times 5 + p$ et donc $3 = 20 + p$.

Finalement, $p = 3 - 20$ et donc $p = -17$

II. Représentation graphique

Nous allons voir une propriété que vous connaissez déjà. C'est l'occasion de réviser un peu mais surtout de préciser les choses.

Rappel : La courbe représentative d'une fonction f a pour équation $y = f(x)$. Cela signifie qu'un point $M(x; y)$ est sur cette courbe si son ordonnée y est l'image de son abscisse x par la fonction f.



Les fonctions peuvent avoir des courbes très compliqués (courbées, irrégulières …). Elles sont la plupart du temps impossibles à dessiner précisément.

La propriété suivante nous dit que dans le cas des **fonctions affines**, la courbe a une forme très simple et sera donc « facile » à dessiner.

Propriété 1 : Soit (O ; I , J) un repère orthonormé.
Une fonction f est une **fonction affine** si et seulement si sa courbe représentative dans le repère est une **droite** qui coupe l'axe des ordonnées (on dit qu'elle est sécante avec l'axe des ordonnées).

Vous savez que : « Pour tracer une droite il suffit de connaître deux points sur cette droite »
Or, la courbe d'une fonction affine est une droite (propriété 1).

Conséquence (comment tracer rapidement la courbe d'une fonction affine) :
Supposons que f soit une fonction affine telle que $f(x) = mx + p$
(prenez m=2 et p=1 si cela vous arrange).

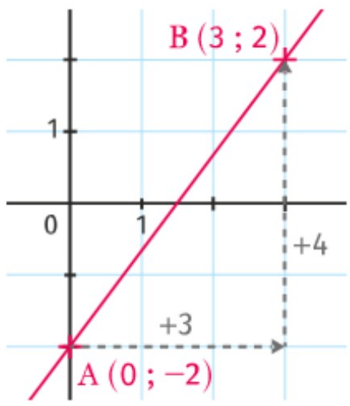
Choisissons deux abscisses x_A et x_B .
On calcul les deux ordonnées $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$. Remarquez que $y_A = f(x_A)$
et $y_B = f(x_B)$
Les deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont sur la courbes.
Pour tracer la courbe de la fonction f il suffit de tracer la droite (AB) !

Exemple :

Représentons dans le repère (0;I,J) la fonction affine h définie par $h(x) = \frac{4}{3}x - 2$

1. On choisit $x_A = 0$ et $x_B = 3$.
2. On a donc $y_A = \frac{4}{3} \times 0 - 2 = -2$ et $y_B = \frac{4}{3} \times 3 - 2 = 2$
3. Les points $A(0; -2)$ et $B(3; 2)$ sont sur la courbe de h (qui est une droite).

Cela nous donne la courbe suivante pour la fonction h :



Le choix de x_A :
On choisira souvent $x_A = 0$. En effet, cela nous donne $y_A = mx_A + p = p$ (l'ordonnée à l'origine).

Le point $A(x_A; y_A)$ est donc $A(0; p)$. Il est sur la droite et se situe sur l'axe des ordonnées au niveau p.

C'est la raison pour laquelle le nombre p est appelé ***l'ordonnée à l'origine.***

III. Taux d'accroissement

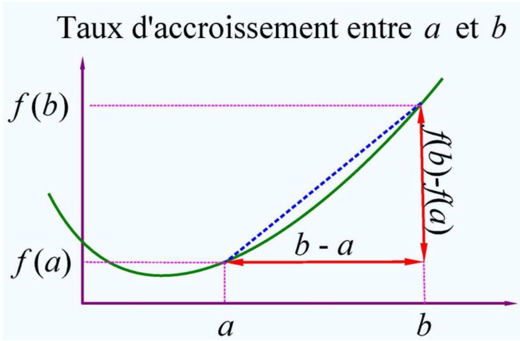
C'est la notion la plus importante et la plus difficile : concentrez vous !

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Considérons deux nombres réels distincts a et b.

Le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b.

Méthode :
Pour mémoriser ce qu'est le taux d'accroissement, dites-vous que c'est le rapport (division) de l'écart verticale par l'écart horizontal.

C'est à dire $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Quel rapport avec les fonctions affines ?
Si vous vous posez cette question vous êtes sur la bonne voix.

Regardons la formule du taux d'accroissement : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Pour une fonction f choisit au hasard, le résultat doit dépendre de a et de b ...

Essayons avec la fonction carré $f(x)=x^2$ (qui n'est pas affine)

Pour $a=0$ et $b=1$ on a $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{1^2-0^2}{1-0} = \dfrac{1}{1} = 1$

mais pour $a=2$ et $b=5$ on a $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{6^2-2^2}{6-2} = \dfrac{32}{4} = 8$ et $1 \neq 8$

Il se trouve que pour une fonction affine $f(x)=mx+p$ on trouvera toujours le même résultat.
De plus, on connaît ce résultat : C'est le coefficient directeur m.

Voici ce que cela donne sous la forme d'une propriété :

Propriété 2 :
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine si et seulement si , le taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le même pour tous réels a et b distincts.

De plus, si $f(x)=mx+p$ alors $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$ pour tous réels a et b distincts.

On en déduit une méthode pour calculer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

Propriété 3 : Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ alors :

1) $p = f(0)$ (c'est la raison pour laquelle p s'appelle l'ordonnée à l'origine).

2) $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pour tous réels a et b distincts.

Conséquence : pour une fonction affine il y a proportionnalité entre les écarts horizontaux et les écarts verticaux. Autrement dit, si $f(x) = mx + p$ alors : $f(b) - f(a) = m(b - a)$ pour tous nombres réels a et b

Exemple : Considérons la fonction affine $f(x) = 2x + 1$ (ici $m = 2$)
Alors on peut remplir la dernière colonne avec une simple multiplication par 2
(évidemment, on peut aussi faire les calculs…)

x 2

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$b - a$	$f(b) - f(a)$
0	1	1	3	**1**	**2**
2	4	5	9	**2**	**4**
12	13,5	25	27	**1,5**	**3**

Conséquence (deuxième méthode pour tracer la courbe d'une fonction affine :
Supposons que f soit une fonction affine telle que $f(x) = 2x + 1$

On sait déjà que sa droite représentative passe par le point de coordonnées (0 ; 1) car $f(0) = 1.$

Grâce au coefficient directeur (égal à 2), on sait que si on avance d'une certaine distance sur l'axe des abscisses alors on doit monter de deux fois cette distance sur l'axe des ordonnées…

La vidéo suivante vous montre comment construire la droite de f en utilisant cette remarque :

Représenter une fonction affine : vidéo 1

https://www.youtube.com/watch?v=fq2sXpbdJQg&feature=youtu.be

Attention, dans cette vidéo le coefficient directeur est noté a et l'ordonnée à l'origine est notée b.
Pour nous c'est plutôt m et p.

À l'inverse, on peut retrouver la **forme algébrique** $f(x) = mx + p$ à partir de la courbe de la fonction :

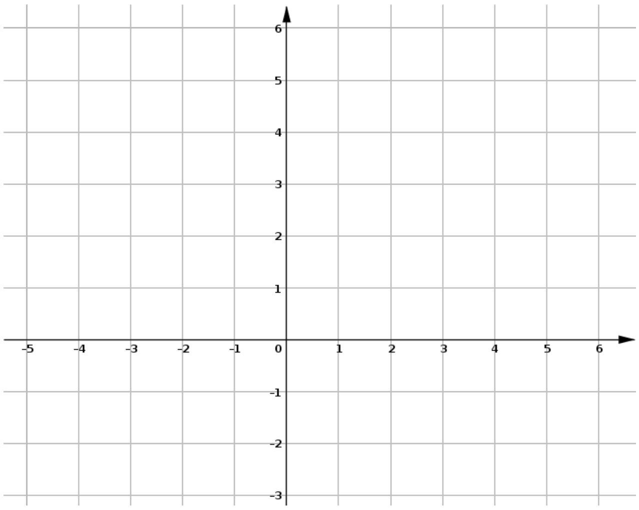
Déterminer graphiquement une fonction affine : vidéo 2

https://www.youtube.com/watch?v=OnnrfqztpTY&feature=youtu.be

Représenter une fonction affine (coefficient=fraction) : vidéo 3
https://www.youtube.com/watch?v=q68CLk2CNik&feature=youtu.be

Exercice corrigé 2

Utiliser le repère suivant pour tracer la droite de la fonction affine f définie par $f(x) = \dfrac{4}{5}x + 2$



Correction ex_corr_2

Déterminer par le calcul une fonction affine : vidéo 4
https://www.youtube.com/watch?v=0jX7iPWCWI4&feature=youtu.be

*Attention, dans ces vidéos, le coefficient directeur **m** est noté **a** et l'ordonnée à l'origine **p** est notée **b**.*

Exercice corrigé 3 Déterminer une expression de la fonction affine f telle que $f(-3) = 4$ et $f(3) = 1$.

Correction ex_corr_3