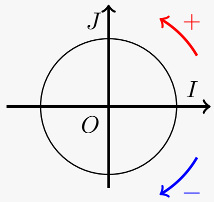
Chapitre 1

Fonctions trigonométriques

1. Le cercle trigonométrique

Définition 1 : cercle trigonométrique

Dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 centré sur l'origine du repère et orienté dans les sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Il y a donc un sens (appelé le **sens trigonométrique**) qui est considéré comme étant positif. Le sens des aiguilles d'une montre est alors le sens négatif.

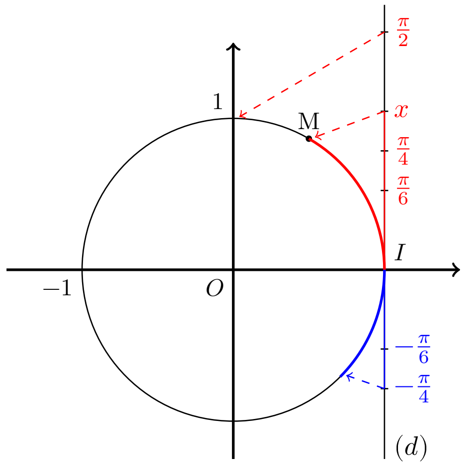


Soit (d) une droite verticale sur laquelle on représente tous les nombres réels. En faisant rouler le cercle trigonométrique sur la droite (d), chaque nombre réel x est associé à un unique point M du cercle. On dit que M est le **point-image** du nombre x.

Remarquons que si M est le point-image d'un nombre x il l'est aussi pour tous les nombres $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (il suffit de faire des tours supplémentaires dans un sens ou dans l'autre).

Soit M un point du cercle trigonométrique, point-image d'un nombre x. On dit que x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. D'après ce qu'on vient de dire, c'est aussi le cas des nombres $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela se résume par la notation :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x\,[2\pi] \quad \text{(lire « } x \text{ modulo } 2\pi \text{ »)}$$

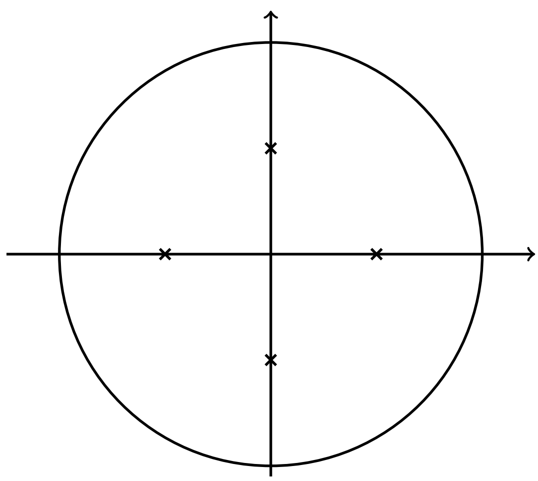


Définition 2

En recherchant le plus court trajet menant de I à M sur le cercle, on trouve le (seul) nombre $x \in]-\pi, \pi]$ dont M est le point-image. C'est la « **mesure principale** » de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Soit $\frac{a\pi}{b}$ une mesure d'un angle avec a et $b \neq 0$ deux nombres entiers. Il ne s'agit pas nécessairement de la mesure principale de l'angle en question. Pour la trouver, on détermine le nombre pair $2n$ le plus proche de $\frac{a}{b}$. La mesure principale est alors donnée par la formule : $\left(\frac{a}{b} - 2n\right)\pi$.

Les mesures principales remarquables à savoir placer sur le cercle trigonométrique sont les multiples de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et bien sûr de π. La construction se fait à partir des milieux des rayons horizontaux et verticaux.

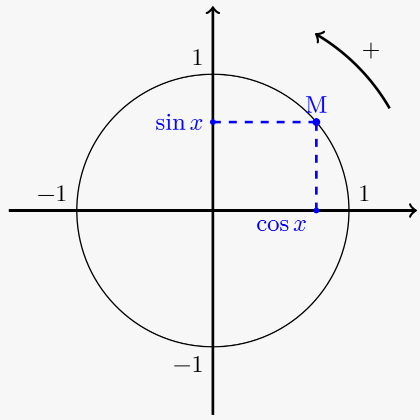


2. Sinus et cosinus d'un nombre réel.

Définition 3

On définit le sinus et le cosinus d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ à l'aide du cercle trigonométrique. Si M est le point image du nombre x sur le cercle alors :

- $\cos x$ est l'abscisse du point M.
- $\sin x$ est l'ordonnée du point M.



On en déduit quelques propriétés qui seront très utilisées par la suite :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

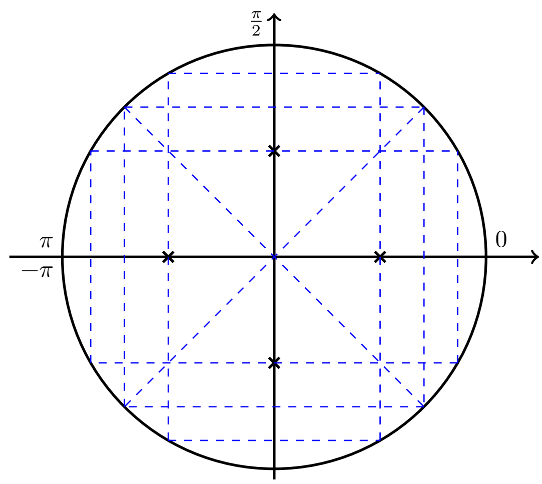
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \ \text{ et } \ \sin(x + 2\pi) = \sin x$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x \ \text{ et } \ \sin(-x) = -\sin x$

- Si vous confondez sinus et cosinus, rappelez-vous l'aide mémoire du collège : SOCATOA.
- Il est impératif de comprendre d'où vient la deuxième propriété ci-dessus. Si ce n'est pas encore le cas, vous devez y réfléchir...

Il est possible de calculer très précisément des valeurs approchées de $\sin x$ et de $\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais pour cela il faut au minimum une calculatrice. Nous allons voir que dans de nombreux cas, on peut calculer (sans calculatrice) les valeurs exactes de $\sin x$ et de $\cos x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$						
$\sin x$						



Recherche

1) Sur un cercle trigonométrique, placer les points-images de $\dfrac{50\pi}{3}$, $-\dfrac{-39\pi}{4}$, $\dfrac{77\pi}{6}$, -51π, 2018π.

2) Utiliser le cercle pour trouver le cosinus et le sinus de ces nombres.

Propriété 1 : Formules d'addition et de duplication

Soient a et b deux nombres réels, alors :

i) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ ***ii)*** $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

iii) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\sin(a)$ ***iv)*** $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Ces formules se déclinent en plusieurs versions qu'il faut pouvoir retrouver selon la situation.
Par exemple en combinant ***ii)*** et le fait que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ on obtient :

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) \quad \text{ou encore} \quad \cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

Démonstration

On démontre uniquement le point i), les autres formules en sont des conséquences. Pour cela, nous allons admettre et utiliser la propriété suivante (démontrée dans le chapitre sur le produit scalaire)

Rappel (produit scalaire)

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
Leur produit scalaire peut s'obtenir des deux façons suivantes :

$$\vec{u}\cdot\vec{u}' = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}')$$

Soient a et b deux nombres réels et c un autre nombre tel que $c = -b$. On a alors $a + b = a - c$.

Dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et de son cercle trigonométrique, on considère les points A et C du cercle, images des nombres a et c.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ ont pour coordonnées :

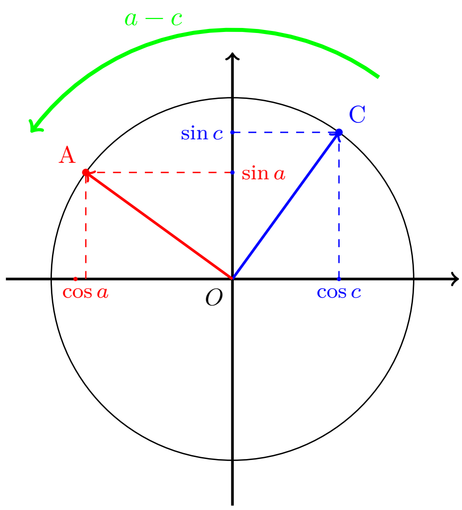
$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos c\\ \sin c\end{pmatrix}.$$

De plus, en examinant le dessin à droite, on voit que les deux vecteurs forment un angle orienté $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)$ de mesure égale à $a - c$ modulo 2π. Comme ces deux vecteurs sont de normes égales à 1, le rappel ci-dessus nous dit que :

$$\cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c) = \cos\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) = \cos(a-c).$$

On verra un peu plus loin que la fonction sinus est impaire et que la fonction cosinus est paire. Dès alors, sachant que $c = -b$, on obtient ce qu'on voulait :

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b).$$



□

Exercice

1) Démontrer que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$.

2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Recherche

1) Calculer $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$.

2) En remarquant que $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$.

3) Trouver deux mesures principales remarquables dont la différence vaut $\frac{\pi}{12}$; puis déterminer le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$.

4) Simplifier $2\times\frac{3\pi}{8}$; puis calculer le cosinus et le sinus de $\frac{3\pi}{8}$.

Exercice

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos^2 x=\frac{1}{2}$.

2) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Recherche

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

a. $\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0$ **b.** $3-2\sqrt{3}\cos x<0$ **c.** $2\cos x-\sqrt{3}<0$ **d.** $1-2\sin x>0$

3. Fonctions sinus et cosinus

On va maintenant s'intéresser à l'évolution des quantités $\sin x$ et $\cos x$ quand x change de valeur. Autrement dit, on va s'intéresser aux fonctions $x\longmapsto\cos(x)$ et $x\longmapsto\sin(x)$

!

À propos des notations :
Selon la situation, on peut utiliser l'une des deux notations $\sin x$ ou $\sin(x)$. Quand on parle de fonction, il est préférable d'utiliser celle avec des parenthèses.

Définition 4

Les fonctions f vérifiant, pour tout x, $f(-x)=f(x)$ sont appelées fonctions paires. Pour ces fonctions, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative.

Les fonctions f vérifiant, pour tout x, $f(-x)=-f(x)$ sont appelées fonctions impaires. Pour ces fonctions, l'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe représentative.

Propriété 2

D'après ce que nous avons dit à la fin de la définition 3, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. En particulier, les graphes de ces deux fonctions présentent des symétries.

Propriété 3

On a vu, comme conséquence de la définition 3, que pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π.

En conséquence, pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

Exercice

1) On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(4x)$. Démontrer que la fonction f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

2) On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(2\pi x)$. Quelle est la période de cette fonction périodique ?

Les fonction sin et cos sont indissociables. Cela se voit dès la définition mais aussi à travers les formules données dans la propriété 1. Les formules de dérivations que nous allons maintenant énoncer renforcent encore le lien qui unis ces deux fonctions.

Propriété 4

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout nombre x :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

On a désormais tout ce qu'il nous faut pour construire les tableaux de variations de sin et de cos

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x = -\sin x$			$-$		
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

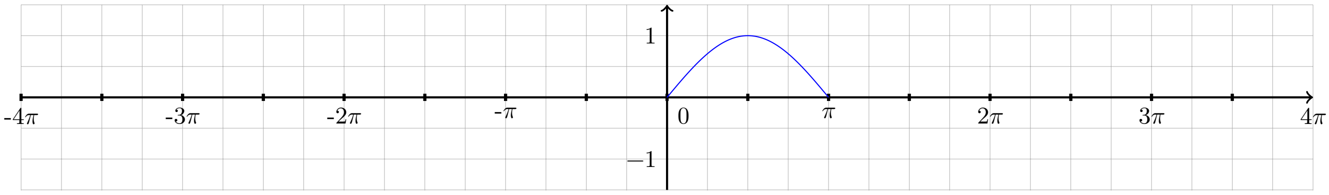
Recherche

Déterminer les dérivées des fonctions ci-dessous.

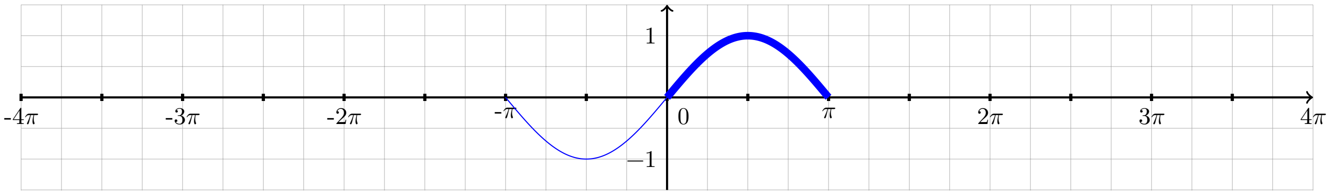
$$f_1(x) = \cos(-3x + 4) \quad f_2(x) = (\sin(-x + 4))^3 \quad f_3(x) = \cos(2x - 1) \quad f_4(x) = \sin(-3x - 2)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\cos(-3x)} \quad f_6(x) = \sqrt{\cos(5x + 1)} \quad f_7(x) = (\cos(-4x + 1))^2 \quad f_8(x) = \sqrt{\sin(4x - 1)}$$

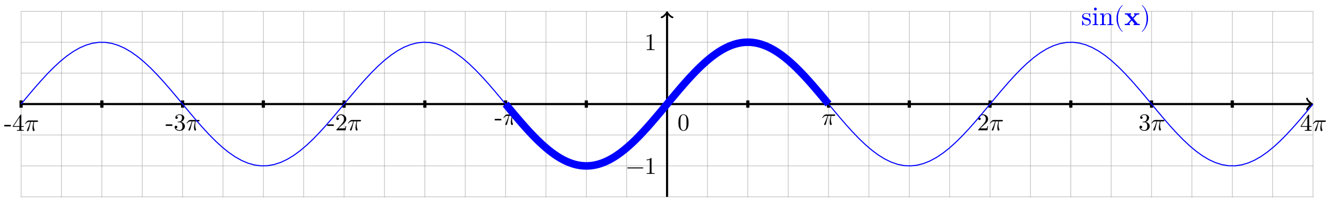
Finalement, nous sommes en mesure d'esquisser la courbe représentative de la fonction sinus.
On commence par utiliser le tableau de variation pour tracer la courbe sur l'intervalle $[0; \pi]$:



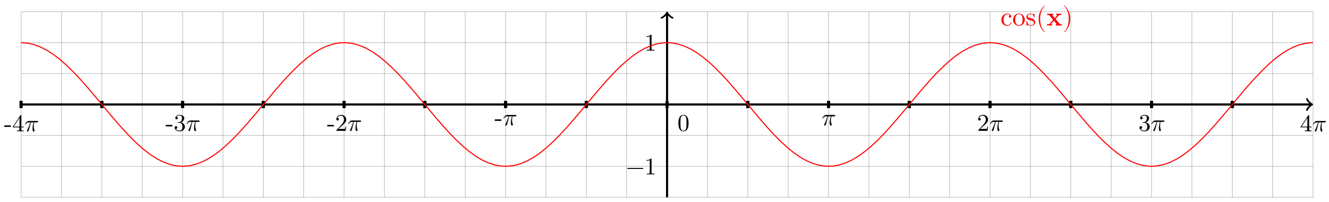
On utilise la propriété 2 et la symétrie pour prolonger la courbe sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$:



On utilise la propriété 3 pour compléter la courbe par translation :



On obtient la courbe représentative de la fonction cosinus en suivant le même procédé :



Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 1$.

1) Soit x un nombre réel, exprimer $f(x + \pi)$ puis $f(-x)$ en fonction de x. Que peut on en déduire sur la fonction f ?

2) Pourquoi peut-on se contenter de dresser le tableau de variation sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$?

3) Dresser le tableau de variation sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4) Dresser le tableau de variation sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

5) Tracer la courbe dans le repère ci-dessous.